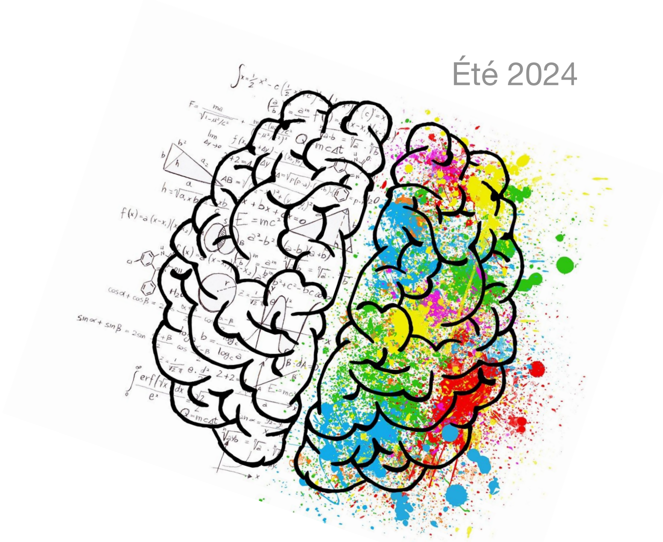
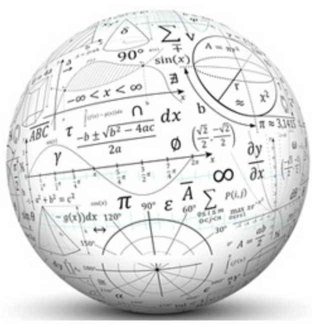
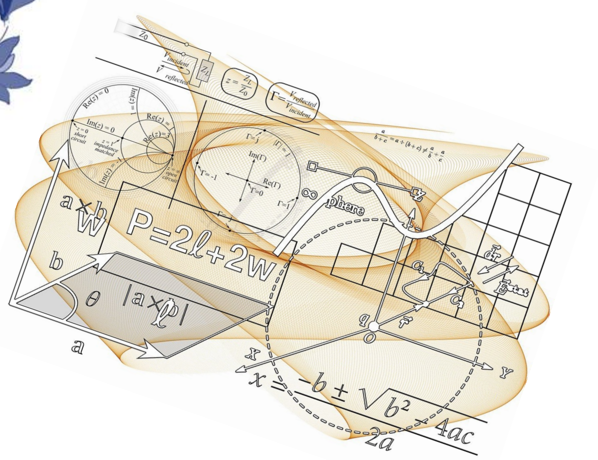


Pour une rentrée sereine en Première

Correction

Été 2024





Conseils pour la correction

Pour tirer le meilleur parti du cahier de vacances, il est essentiel que vous tentiez de résoudre les exercices par vous-mêmes avant de consulter la correction. Ce processus renforcera votre compréhension des concepts mathématiques et vous préparera efficacement pour l'année de première.

- **Travaillez de manière autonome**

Essayez au maximum de résoudre les exercices par vous-mêmes avant de vérifier les réponses dans la correction. Cela vous permettra de développer votre capacité à résoudre des problèmes de manière indépendante.

- **Utilisez les ressources en ligne**

En cas de difficultés, je vous encourage à utiliser les ressources en ligne recommandées, telles que Coopmaths (https://coopmaths.fr/alea/). Ces outils peuvent vous fournir des explications supplémentaires et vous aider à surmonter les obstacles sans révéler immédiatement les réponses.

  - https://coopmaths.fr/alea/
  - https://www.monclasseurdemaths.fr/classe-de-2de/
  - Chaines Youtube Maths en tête
    https://www.youtube.com/@mathsentete/featured
    https://www.youtube.com/@maths-lycee
    https://www.youtube.com/c/Rapémathiques
  - Ressources de l'académie de Versailles
    https://euler-ressources.ac-versailles.fr/wims/wims.cgi?module=help/teacher/program/&+cmd=new&+job=math.2G

- **Apprenez de vos erreurs**

Lorsque vous consultez la correction, analysez vos erreurs avec soin. Comprenez où vous vous êtes trompés et comment vous pourriez éviter ces erreurs à l'avenir. Ce processus d'auto-correction est essentiel pour progresser dans les mathématiques.

- **Exploitez les opportunités d'apprentissage**

Profitez de cette période pour consolider vos bases mathématiques et explorer les concepts plus en profondeur. Chaque exercice résolu vous rapproche un peu plus de la maîtrise des mathématiques en première année.

En travaillant de manière autonome, en vous corrigeant activement et en utilisant les ressources disponibles, vous serez mieux préparés pour réussir en mathématiques. Bon courage et profitez de votre apprentissage !

Bon courage à tous et très belles vacances !

PS : Malgré les nombreuses relectures, il se peut que des coquilles subsistent dans ce livret de vacances. Si vous en repérez, vous pouvez soit me les signaler à la rentrée, soit m'envoyer un courriel à l'adresse suivante : c.ferreira@saintspire.net
Merci de votre compréhension et de votre collaboration.

I. Calcul littéral ~ Équations ~ Inéquations

Calcul littéral

Exercice 1.1

Développer et réduire les expressions suivantes

$A = 2x\ (4x - 5)$

$A = 2x \times 4x - 2x \times 5$

$A = 8x^2 - 10x$

$B = (4x + 5)\ (-2x + 7)$

$B = 4x \times (-2x) + 4x \times 7 + 5 \times (-2x) + 5 \times 7$

$B = -\,8x^2 + 28x - 10x + 35$

$B = -\,8x^2 + 18x + 35$

$C = \left(\frac{1}{4}x - \frac{5}{2}\right)\ \left(-\frac{1}{2}x + \frac{7}{4}\right)$

$C = \frac{1}{4}x \times \left(-\frac{1}{2}x\right) + \frac{1}{4}x \times \frac{7}{4} - \frac{5}{2} \times \left(-\frac{1}{2}x\right) - \frac{5}{2} \times \frac{7}{4}$

$C = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{7}{16}x + \frac{5}{4}x - \frac{35}{8}$

$C = -\frac{1}{8}x^2 + \left(\frac{7}{16} + \frac{20}{16}\right)x - \frac{35}{8}$

$C = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{27}{16}x - \frac{35}{8}$

$D = 2x\ (-4x - 5)\ (-x + 7)$

$D = 2x\ (-4x \times (-x) - 4x \times 7 - 5 \times (-x) - 5 \times 7)$

$D = 2x\ (4x^2 - 28x + 5x - 35)$

$D = 2x\ (4x^2 - 23x - 35)$

$D = 8x^3 - 46x^2 - 70x$

$E = (4x + 5)^2$

$E = (4x)^2 + 2 \times 4x \times 5 + 5^2$

$E = 16x^2 + 40x + 25$

$F = 3\ (x + 5)^2$

$F = 3(x^2 + 10x + 25)$

$F = 3x^2 + 30x + 75$

$J = (\sqrt{5} + \sqrt{7})\ (-\sqrt{5} + \sqrt{7})$

$J = (\sqrt{5} + \sqrt{7})\ (\sqrt{7} - \sqrt{5})$

$J = (\sqrt{7})^2 - (\sqrt{5})^2$

$J = 7 - 5$

$J = 2$

$G = (4x - 3)^2$

$G = (4x)^2 - 2 \times 4x \times 3 + 3^2$

$G = 16x^2 - 24x + 9$

$H = (2x + 1)^2 + (2x + 1)\ (4x + 3)$

$H = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 1 + 1^2 + (2x \times 4x + 2x \times 3 + 1 \times 4x + 1 \times 3)$

$H = 4x^2 + 4x + 1 + 8x^2 + 10x + 3$

$H = 4x^2 + 8x^2 + 4x + 10x + 1 + 3$

$H = 12x^2 + 14x + 4$

$I = (5x + 1)\ (2x - 3) - (5x - 1)^2$

$I = (10x^2 - 15x + 2x - 3) - (25x^2 - 10x + 1)$

$I = 10x^2 - 13x - 3 - 25x^2 + 10x - 1$

$I = -\,15x^2 - 3x - 4$

Exercice 1.2

Factoriser le plus possible et réduire les expressions suivantes

$K = (2x+1)^2 + (2x+1)(4x+3)$
$K = (2x+1)\left[(2x+1)+(4x+3)\right]$
$K = (2x+1)(2x+1+4x+3)$
$K = (2x+1)(6x+4)$
$K = (2x+1)(2\times 3x + 2\times 2)$
$K = 2(2x+1)(3x+2)$

$L = -2x(5x-1)-(5x-1)(2x-3)$
$L = (5x-1)\left[-2x-(2x-3)\right]$
$L = (5x-1)(-2x-2x+3)$
$L = (5x-1)(-4x+3)$

$M = 49x^2 - 100$
$M = (7x)^2 - (10)^2$
$M = (7x-10)(7x+10)$

$N = -64y^2 + 25$
$N = 5^2 - (8y)^2$
$N = (5-8y)(5+8y)$

$O = 9z^2 + 12z + 4$
$O = (3z)^2 + 2\times 3z \times 2 + 2^2$
$O = (3z+2)^2$

$P = 4x^2 - 20x + 25$
$P = (2x)^2 - 2\times 2x \times 5 + 5^2$
$P = (2x-5)^2$

$Q = (2x-3)^2 - (4x-6)(6x+1)$
$Q = (2x-3)^2 - 2(2x-3)(6x+1)$
$Q = (2x-3)\left[(2x-3)-2(6x+1)\right]$
$Q = (2x-3)(2x-3-12x-2)$
$Q = (2x-3)(-10x-5)$
$Q = 5(2x-3)(-2x-1)$

$R = (4x+3)^2 - (2x-1)^2$
$R = \left[(4x+3)-(2x-1)\right]\left[(4x+3)+(2x-1)\right]$
$R = (4x+3-2x+1)(4x+3+2x-1)$
$R = (2x+4)(6x+2)$
$R = 2(x+2)\times 2(3x+1)$
$R = 4(x+2)(3x+1)$

Équations

Exercice 1.3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

a) $6x - 5 = 13$
$6x = 18$
$x = 3$
$S = \{3\}$

b) $-7x + 3 = 3(2x-1)$
$-7x + 3 = 6x - 3$
$3 + 3 = 6x + 7x$
$6 = 13x$
$x = \dfrac{6}{13}$
$S = \left\{\dfrac{6}{13}\right\}$

c) $(3x-7)(6x+8)=0$

$3x-7=0$ ou $6x+8=0$

$3x=7$ ou $6x=-8$

$x=\dfrac{7}{3}$ ou $x=-\dfrac{4}{3}$

$S=\left\{-\dfrac{4}{3};\dfrac{7}{3}\right\}$

d) $\dfrac{3x+4}{x}=0$

On peut résoudre dans $\mathbb{R}^*$ cette équation.

$\dfrac{3x+4}{x}=0 \quad \Rightarrow \quad 3x+4=0$

$3x=-4$

$x=-\dfrac{4}{3}$

$S=\left\{-\dfrac{4}{3}\right\}$

g) $3x^2-15=0$

$3(x^2-5)=0$

$(x^2-5)=0$

$(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})=0$

$x-\sqrt{5}=0$ ou $x+\sqrt{5}=0$

$x=\sqrt{5}$ ou $x=-\sqrt{5}$

$S=\left\{-\sqrt{5};\sqrt{5}\right\}$

e) $\dfrac{3x+4}{5x-3}=0$

On peut résoudre dans $\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{3}{5}\right\}$ cette équation.

$\dfrac{3x+4}{5x-3}=0 \quad \Rightarrow \quad 3x+4=0$

$3x=-4$

$x=-\dfrac{4}{3}$

$S=\left\{-\dfrac{4}{3}\right\}$

f) $x^2=81$

$x^2-81=0$

$x^2-9^2=0$

$(x-9)(x+9)=0$

$x-9=0$ ou $x+9=0$

$x=9$ ou $x=-9$

$S=\{-9;9\}$

h) $\dfrac{x-2}{x+2} = \dfrac{1}{3}$

On peut résoudre dans $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$ cette équation.

$$\frac{x-2}{x+2} = \frac{1}{3} \quad \leftrightarrow \quad \frac{x-2}{x+2} - \frac{1}{3} = 0$$

$$\frac{3\times(x-2)}{3\times(x+2)} - \frac{1\times(x+2)}{3\times(x+2)} = 0$$

$$\frac{3(x-2)-(x+2)}{3\times(x+2)} = 0$$

$$\frac{3x-6-x-2}{3\times(x+2)} = 0$$

$$\frac{2x-8}{3\times(x+2)} = 0$$

$$2x-8=0$$

$$2x = 8$$

$$x = 4$$

$$S = \{4\}$$

i) $\dfrac{3x+4}{x+2} = \dfrac{6x+5}{2x+2}$

On peut résoudre cette équation dans $\mathbb{R}\backslash\{-2;-1\}$.

$$\frac{3x+4}{x+2} = \frac{6x+5}{2x+2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3x+4}{x+2} - \frac{6x+5}{2x+2} = 0$$

$$\frac{(3x+4)\times(2x+2)}{(x+2)\times(2x+2)} - \frac{(6x+5)\times(x+2)}{(2x+2)\times(x+2)} = 0$$

$$\frac{(3x+4)\ (2x+2)-(6x+5)\ (x+2)}{(2x+2)\ (x+2)} = 0$$

$$(3x+4)\ (2x+2)-(6x+5)\ (x+2)=0$$

$$3x\times 2x + 3x\times 2 + 4\times 2x + 4\times 2 - (6x\times x + 6x\times 2 + 5\times x + 5\times 2) = 0$$

$$6x^2+6x+8x+8-\left(6x^2+12x+5x+10\right)=0$$

$$6x^2+14x+8-\left(6x^2+17x+10\right)=0$$

$$6x^2+14x+8-6x^2-17x-10=0$$

$$-3x-2=0$$

$$-2=3x$$

$$x = -\frac{2}{3}$$

$$S = \left\{-\frac{2}{3}\right\}$$

j) $(2x+3)(3x+5)=6x^2+4x-8$

$2x\times 3x+2x\times 5+3\times 3x+3\times 5=6x^2+4x-8$

$6x^2+9x+10x+15=6x^2+4x-8$

$6x^2-6x^2+19x-4x+15-15=6x^2-6x^2+4x-4x-8-15$

$15x=-23$

$x=-\dfrac{23}{15}$

$S=\left\{-\dfrac{23}{15}\right\}$

Exercice 1.4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

a) $(3x-1)(5x-2)-(5x-2)(4x-6)=0$

$(5x-2)\ \left[(3x-1)-(4x-6)\right]=0$

$(5x-2)(3x-1-4x+6)=0$

$(5x-2)(-x+5)=0$

$5x-2=0$ ou $-x+5=0$

$5x=2$ ou $x=5$

$x=\dfrac{2}{5}$

$S=\left\{\dfrac{2}{5};\ 5\right\}$

b) $(x-1)(2x-6)=4x^2-24x+38$

$x\times 2x+x\times(-6)-1\times 2x-1\times(-6)=4x^2-24x+38$

$2x^2-6x-2x+6=4x^2-24x+38$

$2x^2-8x+6=4x^2-24x+38$

$4x^2-24x+38=2x^2-8x+6$

$4x^2-2x^2-24x+8x+38-6=0$

$2x^2-16x+32=0$

$2\ (x^2-8x+16)=0$

$x^2-8x+16=0$

$x^2-2\times x\times 4+4^2=0$

$(x-4)^2=0$

$x-4=0$

$x=4$

$S=\{4\}$

c) $2x-1=\dfrac{5}{2x-1}$

On peut résoudre cette équation dans $\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

$$2x-1-\frac{5}{2x-1}=0$$

$$\frac{(2x-1)\times(2x-1)}{2x-1}-\frac{5}{2x-1}=0$$

$$\frac{(2x-1)^2-5}{2x-1}=0$$

$$(2x-1)^2-5=0$$

$$(2x-1)^2-\sqrt{5}^2=0$$

$$\left((2x-1)-\sqrt{5}\right)\ \left((2x-1)+\sqrt{5}\right)=0$$

$2x-1-\sqrt{5}=0$ ou $2x-1+\sqrt{5}=0$

$2x=1+\sqrt{5}$ ou $2x=1-\sqrt{5}$

$x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ou $x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

$$S=\left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2};\ \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}$$

d) $\dfrac{x^2-3x}{x-3}=3$

On peut résoudre cette équation dans $\mathbb{R}\backslash\{3\}$.

$$\frac{x^2-3x}{x-3}-3=0$$

$$\frac{x^2-3x}{x-3}-\frac{3\times(x-3)}{x-3}=0$$

$$\frac{x^2-3x-3\ (x-3)}{x-3}=0$$

$$x^2-3x-3\ (x-3)=0$$

$$x^2-3x-3x-3\times(-3)=0$$

$$x^2-6x+9=0$$

$$x^2-2\times x\times 3+3^2=0$$

$$(x-3)^2=0$$

$$x-3=0$$

$$x=3$$

3 est la valeur interdite.

Donc $S=\varnothing$

Exercice 1.5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes d'équations suivants

a) $\begin{cases} 2x+5y=4 \\ 6x+5y=12 \end{cases}$

Méthode par combinaison

$$\begin{cases} 2x+5y=4 \quad (L_1) \\ 6x+5y-(2x+5y)=12-4 \quad (L_2-L_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+5y=4 \\ 6x+5y-2x-5y=8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+5y=4 \\ 4x=8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+5y=4 \\ x=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\times 2+5y=4 \\ x=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4+5y=4 \\ x=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=0 \\ x=2 \end{cases}$$

Solution: $(x,y)=(2{,}0)$

$S=\{(2;0)\}$

b) $\begin{cases} 7x-5y=42 \\ 6x+8y=12 \end{cases}$

Méthode par combinaison

$$\begin{cases} 7x-5y=42 \\ 2\ (3x+4y)=2\times 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x-5y=42 \quad (L_1) \\ 3x+4y=6 \quad (L_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4(7x-5y)+5(3x+4y)=4\times 42+5\times 6 \quad (4L_1+5L_2) \\ 3x+4y=6 \quad (L_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 28x-20y+15x+20y=168+30 \\ 3x+4y=6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 43x=198 \\ 3x+4y=6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{198}{43} \\ 3\times\dfrac{198}{43}+4y=6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{198}{43} \\ 4y=6-\dfrac{594}{43} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{198}{43} \\ 4y=\dfrac{6\times 43-594}{43} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{198}{43} \\ 4y=\dfrac{-336}{43} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{198}{43} \\ y=\dfrac{-84\times 4}{4\times 43} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{198}{43} \\ y=\dfrac{-84}{43} \end{cases}$$

Solution: $(x;y)=\left(\dfrac{198}{43};-\dfrac{84}{43}\right)$

$S=\left\{\left(\dfrac{198}{43};-\dfrac{84}{43}\right)\right\}$

Inéquations

Exercice 1.6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes

a) $6x - 5 \geqslant 13$

$6x \geqslant 13 + 5$

$6x \geqslant 18$

$\dfrac{6x}{6} \geqslant \dfrac{18}{6}$

$x \geqslant 3$

$S = \left[3; + \infty\right[$

b) $-7x + 3 < 1$

$-7x < 1 - 3$

$-7x < -2$

⚠️ $\dfrac{-7x}{-7} > \dfrac{-2}{-7}$

$x > \dfrac{2}{7}$

$S = \left]\dfrac{2}{7}; + \infty\right[$

c) $\dfrac{1}{3} + 2x \leqslant 5$

$2x \leqslant 5 - \dfrac{1}{3}$

$2x \leqslant \dfrac{15 - 1}{3}$

$x \leqslant \dfrac{14}{3 \times 2}$

$x \leqslant \dfrac{7}{3}$

$S = \left]-\infty; \dfrac{7}{3}\right]$

d) $\dfrac{4}{3}x + 3 < x + 2$

$\dfrac{4}{3}x - x < 2 - 3$

$\dfrac{4}{3}x - \dfrac{3}{3}x < 2 - 3$

$\dfrac{1}{3}x < -1$

$3 \times \dfrac{1}{3}x < -1 \times 3$

$x < -3$

$S = \left]-\infty; -3\right[$

II. Fonctions

Fonction affine

Exercice 2.1

On considère la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x - 3$

a) Tracez la fonction de manière numérique en utilisant un logiciel comme votre calculatrice graphique ou GeoGebra.

b) Déterminer graphiquement l'image de 2 par la fonction f.

Par lecture graphique, $f(2) = 5$

c) Retrouver ce résultat par le calcul.

$f(2) = 4 \times 2 - 3$
$f(2) = 8 - 3$
$f(2) = 5$

d) Déterminer graphiquement l'antécédent de -1 par la fonction f.

Par lecture graphique, $f\left(0{,}5\right) = -1$

Exercice 2.2

a) Déterminer le coefficient directeur de la droite représentant le fonction affine f telle que $f(2) = 4$ et $f(6) = 7$.

La fonction affine f a pour expression algébrique $f(x) = ax + b$.
Pour déterminer le coefficient directeur de la droite représentant la fonction affine f passant par les points de coordonnées $(x_1;\ y_1)$ et $(x_2;\ y_2)$, nous utilisons la formule du coefficient directeur :

Méthode 1

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
$$a = \frac{7-4}{6-2}$$
$$a = \frac{3}{4}$$

Méthode 2

$$a = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$
$$a = \frac{4-7}{2-6}$$
$$a = \frac{-3}{-4}$$
$$a = \frac{3}{4}$$

b) Déterminer l'expression algébrique de la fonction affine g telle que $g(2) = -1$ et $g(3) = 4$.

Calculons le coefficient directeur

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
$$a = \frac{4-(-1)}{3-2}$$
$$a = \frac{4+1}{3-2}$$
$$a = 5$$

Calculons l'ordonnée à l'origine

Utilisons le point de coordonnées $(2; -1)$ pour déterminer b.
$g(2) = -1$ et $g(2) = 5 \times 2 + b$
Donc $10 + b = -1$
$b = -1 - 10$
$b = -11$

L'expression algébrique de la fonction affine est donc $g(x) = 5x - 11$.

c) Calculer le coefficient directeur de la droite (AB) passant par les points $A(2;-1)$ et $B(-3;2)$.

<u>*Méthode 1*</u>

$$a=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$$

$$a=\frac{2-(-1)}{-3-2}$$

$$a=\frac{2+1}{-3-2}$$

$$a=\frac{3}{-5}$$

$$a=-\frac{3}{5}$$

<u>*Méthode 2*</u>

$$a=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}$$

$$a=\frac{-1-2}{2-(-3)}$$

$$a=\frac{-3}{2+3}$$

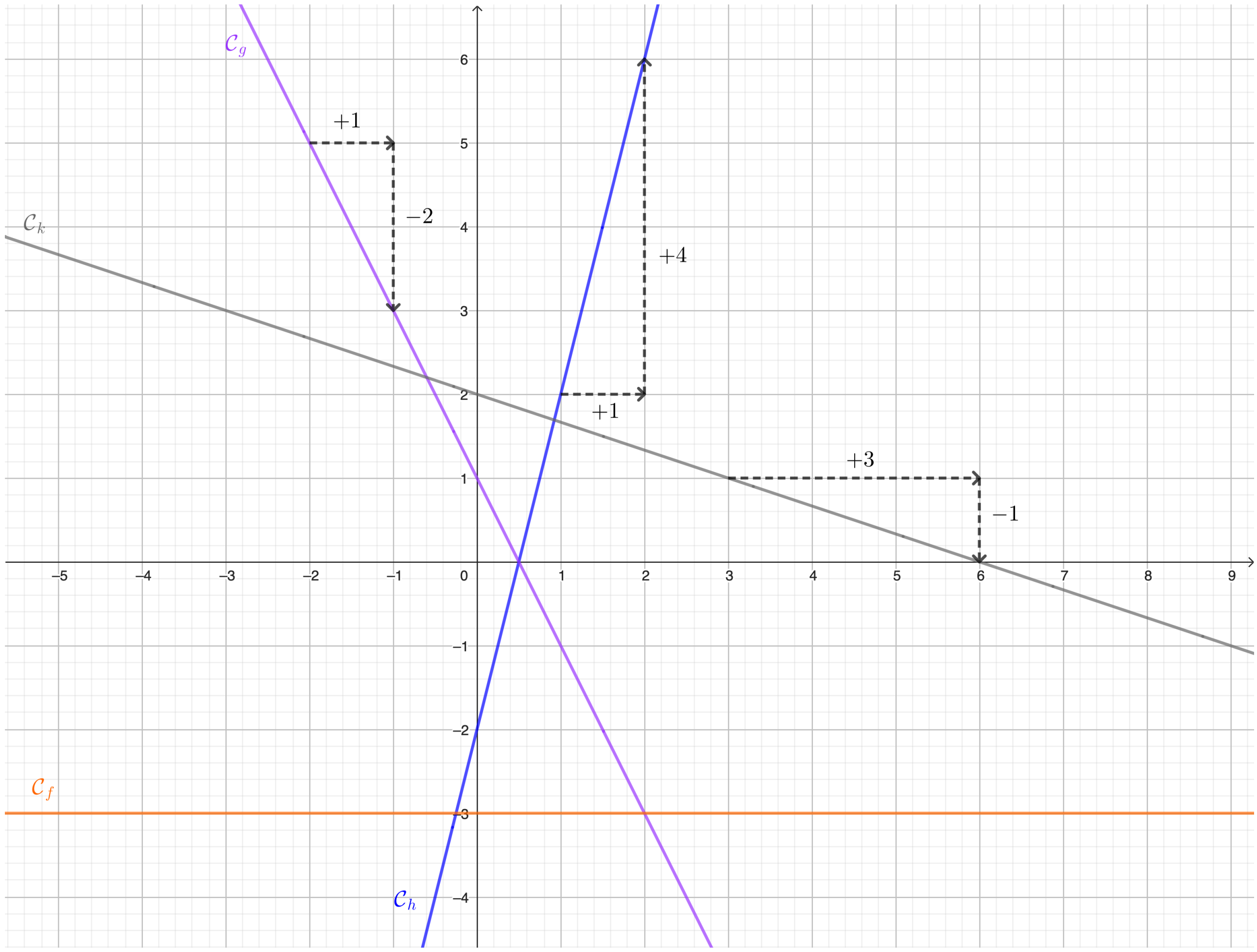
$$a=\frac{-3}{5}$$

$$a=-\frac{3}{5}$$

Donc, le coefficient directeur de la droite passant par les points $A(2;-1)$ et $B(-3;\ 2)$ est $-\dfrac{3}{5}$.

Exercice 2.3

Déterminer graphiquement l'expression algébrique des fonctions affines représentées ci-dessous.



Par lecture graphique

- pour la fonction f : $a_f = 0$ et $b_f = -3$
- pour la fonction g : $a_g = -2$ et $b_g = 1$
- pour la fonction h : $a_h = 4$ et $b_h = -2$
- pour la fonction k : $a_k = -\dfrac{1}{3}$ et $b_k = 2$

Les expressions des fonctions $f,\ g,\ h$ et k sont respectivement -3, $-2x+1$, $4x-2$ et $-\dfrac{1}{3}x+2$.

$\Leftrightarrow f(x) = -3,\ g(x) = -2x+1,\ h(x) = 4x-2$ et $k(x) = -\dfrac{1}{3}x+2$.

Généralités ~ Équations ~ Inéquations

Exercice 2.4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 9x - 2$

a) Donner la nature de la fonction f.

L'expression algébrique de la fonction f est de la forme $ax + b$.
La fonction f est donc une fonction affine.

b) Calculer $f(0)$; $f\left(\dfrac{1}{9}\right)$; $f\left(\dfrac{5}{18}\right)$.

$f(0) = 9 \times 0 - 2$

$f(0) = -2$

$f\left(\dfrac{1}{9}\right) = \cancel{9} \times \dfrac{1}{\cancel{9}} - 2$

$f\left(\dfrac{1}{9}\right) = 1 - 2$

$f\left(\dfrac{1}{9}\right) = -1$

$f\left(\dfrac{5}{18}\right) = 9 \times \dfrac{5}{18} - 2$

$f\left(\dfrac{5}{18}\right) = \cancel{9} \times \dfrac{5}{\cancel{9} \times 2} - 2$

$f\left(\dfrac{5}{18}\right) = \dfrac{5}{2} - 2$

$f\left(\dfrac{5}{18}\right) = \dfrac{5}{2} - \dfrac{4}{2}$

$f\left(\dfrac{5}{18}\right) = \dfrac{1}{2}$

c) Déterminer le(s) antécédent(s) de 0 par f.

$f(x) = 9x - 2$ et $f(x) = 0$

Donc $9x - 2 = 0$

$9x = 2$

$x = \dfrac{2}{9}$

L'antécédent de 0 par la fonction f est $\dfrac{2}{9}$. $\Leftrightarrow$ $f\left(\dfrac{2}{9}\right) = 0$

d) Résoudre dans $\mathbb{R}$, $f(x) \leqslant 0$.

<u>*Méthode 1*</u>

x	$-\infty$		$\dfrac{2}{9}$		$+\infty$
Signes de $f(x)$		$-$	0	$+$	

D'après le tableau de signe, $f(x) \leqslant 0$ pour $x \in \left]-\infty; \dfrac{2}{9}\right]$.

$$S = \left]-\infty;\ \frac{2}{9}\right]$$

<u>*Méthode 2*</u>

$f(x) \leqslant 0$

$9x - 2 \leqslant 0$

$9x \leqslant 2$

$x \leqslant \dfrac{2}{9}$

$$S = \left]-\infty;\ \frac{2}{9}\right]$$

Exercice 2.5

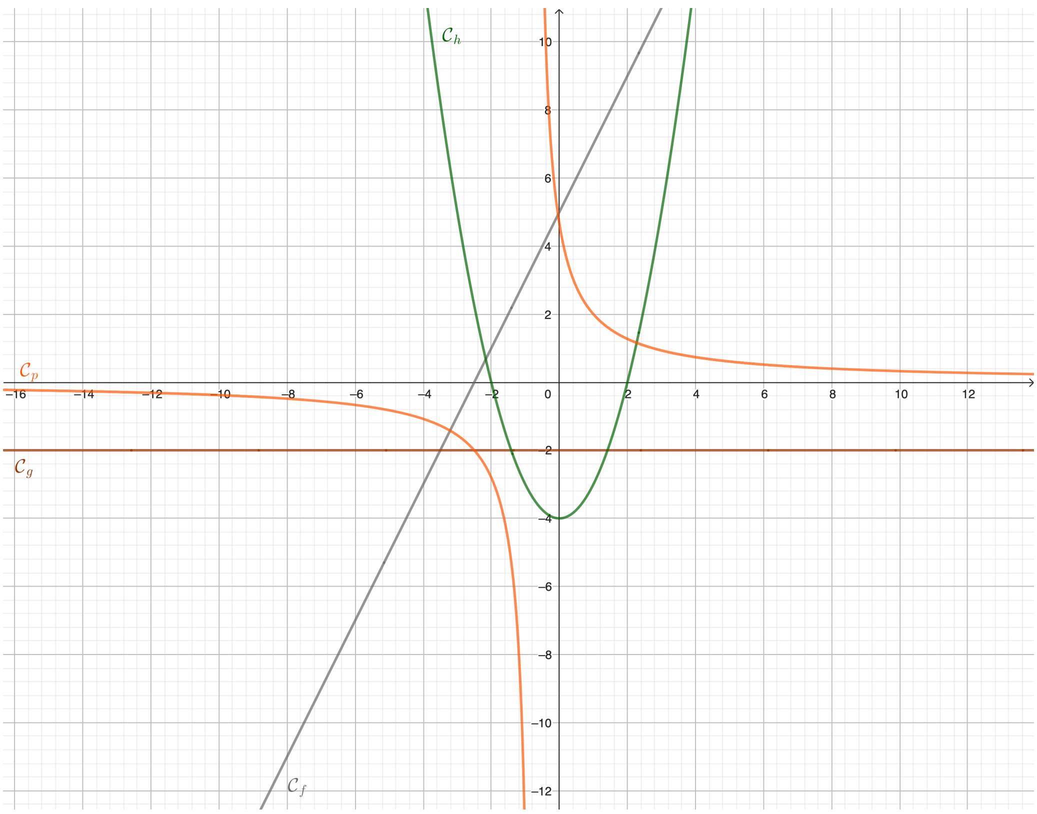
Dans un même repère, tracer les courbes représentatives des fonctions suivantes :

$f(x) = 2x + 5;$

$g(x) = -2;$

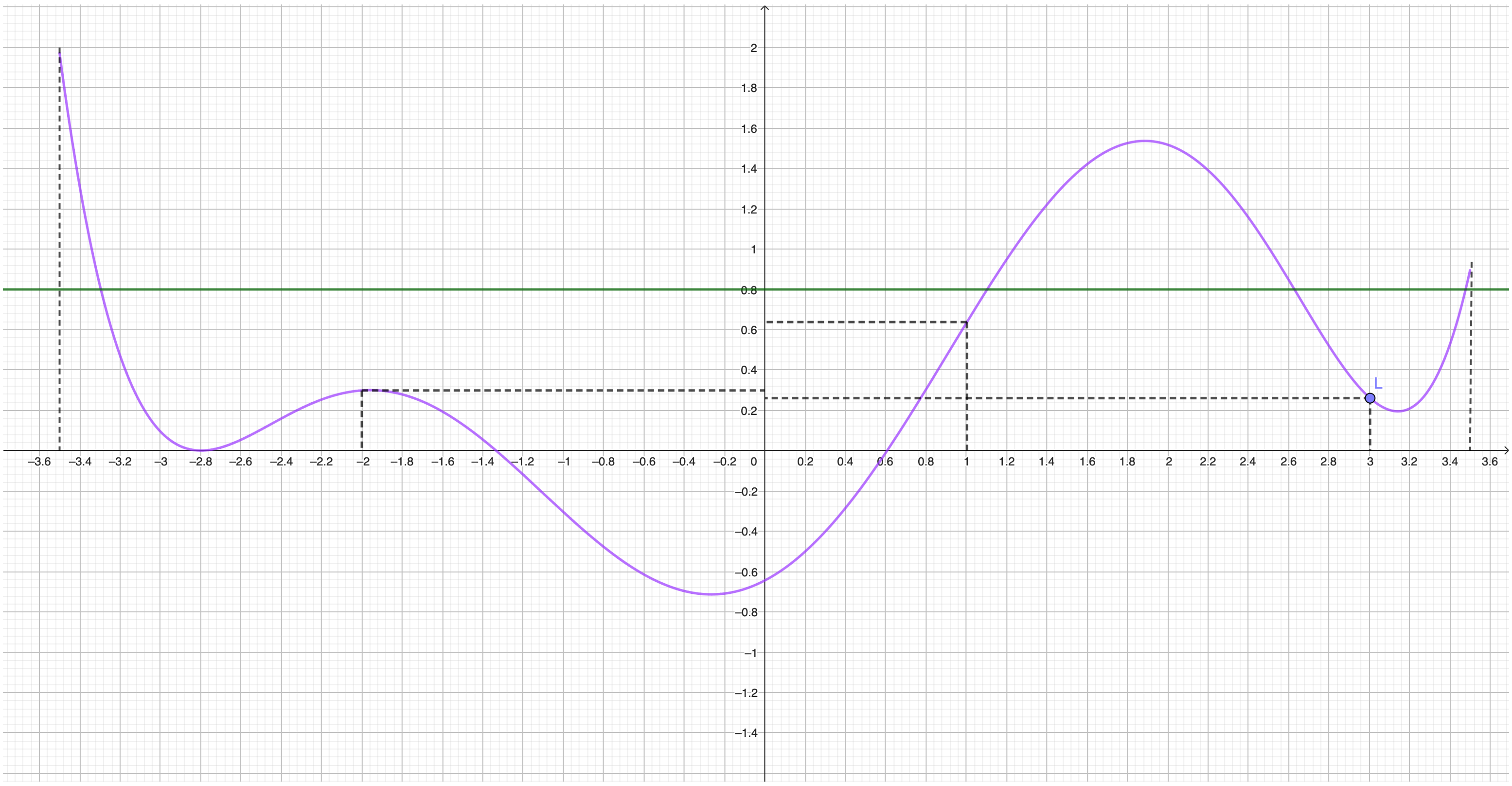
$h(x) = x^2 - 4$

$p(x) = \dfrac{7}{2x + 1{,}5}$



Exercice 2.6

Soit g la fonction dont la courbe représentative est donnée ci-dessous



a) Donner l'ensemble de définition D_g de la fonction g.

$D_g = [-3{,}5; 3{,}5]$

b) Quelle est l'image de 1, de -2 ?

D'après le graphique un petit carreau représente $0{,}04$ unité.

$g(1) = 0{,}64$

$g(-2) = 0{,}3$

c) Que vaut $g(3)$?

$g(3) = 0{,}26$

d) Combien d'antécédents par la fonction g possèdent les nombres -2 et $0{,}8$?

-2 ne possède aucun antécédent par la fonction g.

Par lecture graphique, $0{,}8$ possède 4 antécédents par la fonction g.

e) Résoudre graphiquement l'équation $g(x) = 0$ sur D_g.

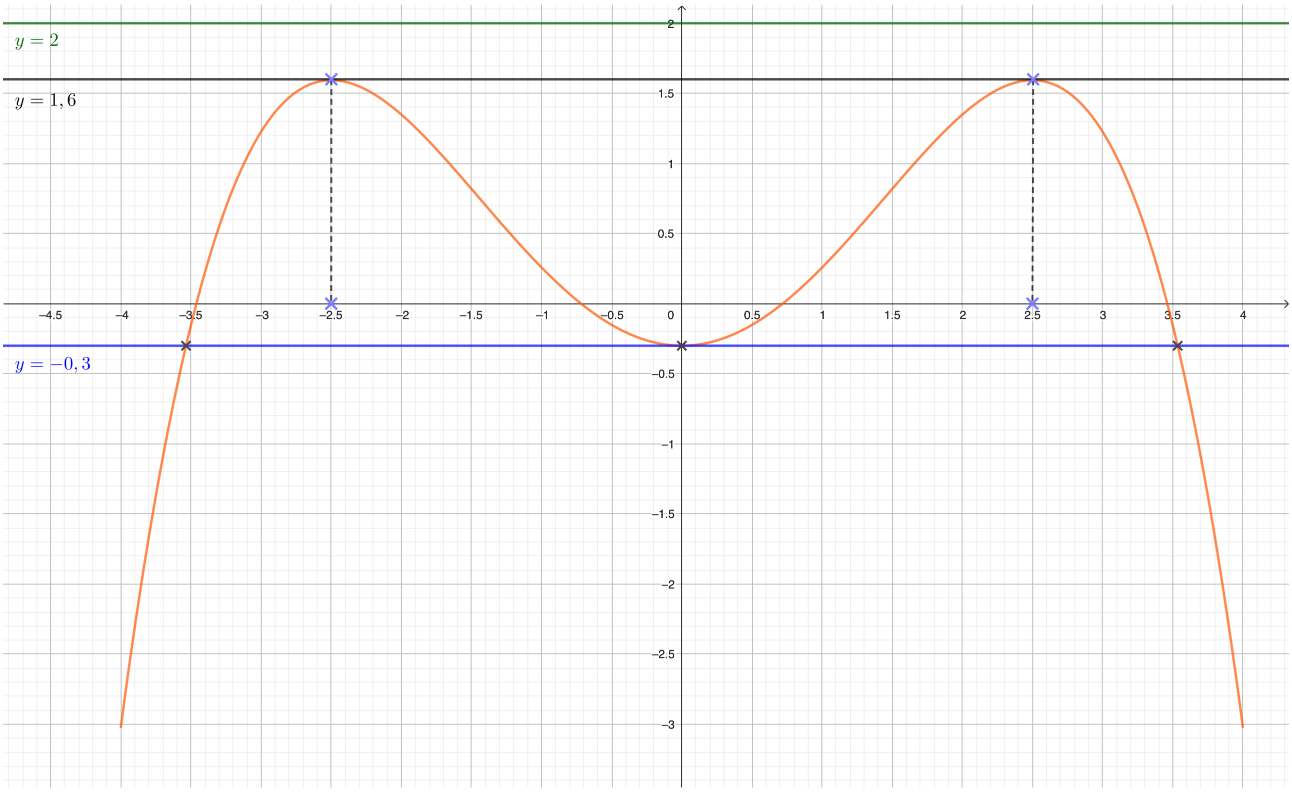
Par lecture graphique $S = \{-2{,}8; -1{,}34; 0{,}6\}$

f) Résoudre graphiquement l'inéquation $g(x) \leqslant 0$ sur D_g.

$S = [-1{,}34; 0{,}6]$

Exercice 2.7

Soit h la fonction dont la courbe représentative est donnée ci-dessous.



a) La fonction h semble-t-elle paire ? Impaire ? Ni l'un ni l'autre ?

La courbe représentative de la fonction semble symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Donc la fonction semble paire.

b) Donner l'ensemble de définition D_h de la fonction h.

$D_h = [-4;\ 4]$

c) Résoudre graphiquement les équations $h(x) = 1{,}6$ et $h(x) = 2$ sur D_h.

Équation $h(x) = 1{,}6$

Par lecture graphique $S = \left\{-2{,}5;\ 2{,}5\right\}$

Équation $h(x) = 2$

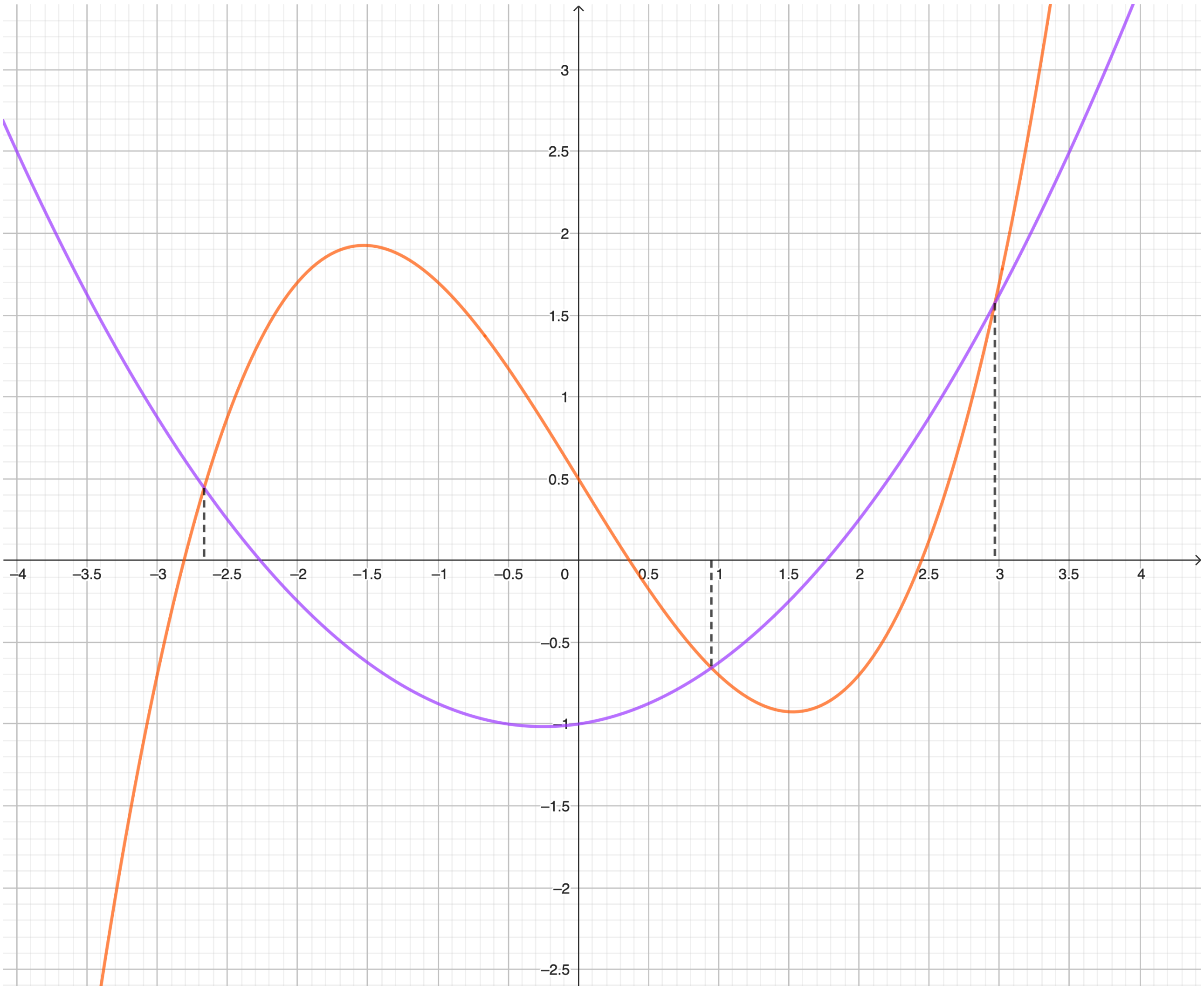
Par lecture graphique, cette équation n'a pas de solution. $S = \emptyset$

d) Résoudre graphiquement l'inéquation $h(x) \leqslant -0{,}3$ sur D_h.

Par lecture graphique $S = [-4;\ -3{,}52] \cup\ [3{,}52;\ 4]$

Exercice 2.8

Soient $f_1 : x \mapsto \frac{x^3}{5} - \frac{7x}{5} + \frac{1}{2}$ *et* $f_2 : x \mapsto \frac{x^2}{4} + \frac{x}{8} - 1$.



a) Calculer $f_1(0)$ *et* $f_2(0)$.

$$f_1(0) = \frac{0^3}{5} - \frac{7 \times 0}{5} + \frac{1}{2}$$

$$f_1(0) = \frac{1}{2}$$

$$f_2(0) = \frac{0^2}{4} + \frac{0}{8} - 1$$

$$f_2(0) = -1$$

b) Associer chaque courbe à la fonction correspondante.

Les courbes orange et violette coupent respectivement l'axe des ordonnées en $0{,}5$ et en -1 qui représente l'ordonnée à l'origine.
Elles sont donc les courbes représentatives respectives des fonctions f_1 et f_2.

c) Donner le nombre de solutions l'équation $f_1(x) = f_2(x)$ *sur l'intervalle* $[-4; 4]$.

Les courbes orange et violette ont trois points d'intersection. L'équation $f_1(x) = f_2(x)$ a donc trois solutions.

d) Résoudre graphiquement l'inéquation $f_1(x) > f_2(x)$ *sur* $[-4; 4]$.

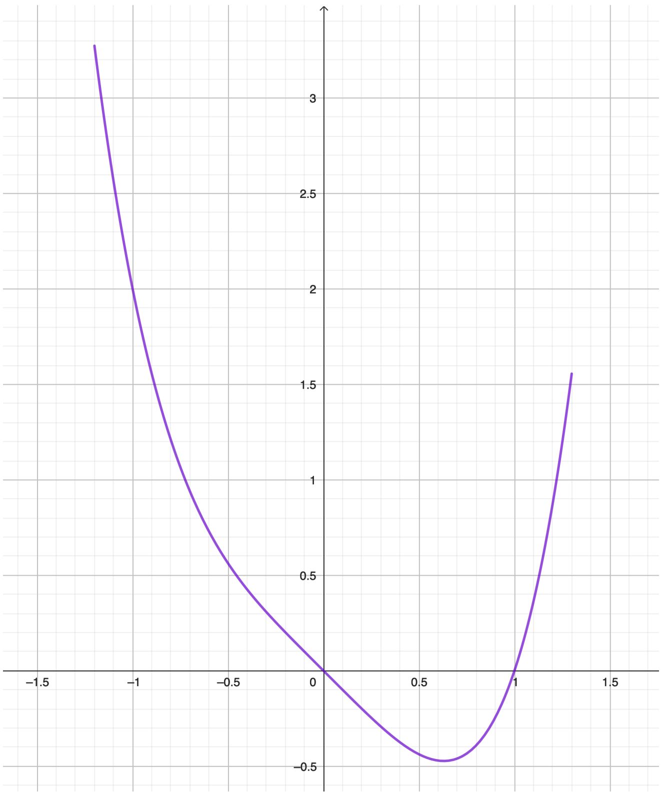
Par lecture graphique $S =]-2{,}65;\ 0{,}95[\cup]2{,}95;\ 4]$

Tableaux de variations et de signes

Exercice 2.9

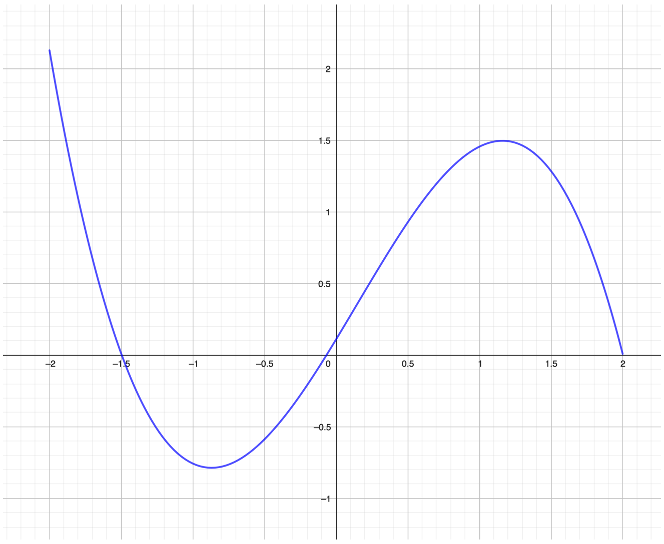
Construire les tableaux de variations et de signes des fonctions f, g, h et i dont les courbes représentatives sont respectivement données ci-dessous.

Les nombres dans les tableaux de variation et de signe sont des lectures graphiques. Vous pouvez avoir des nombres légèrement différents.



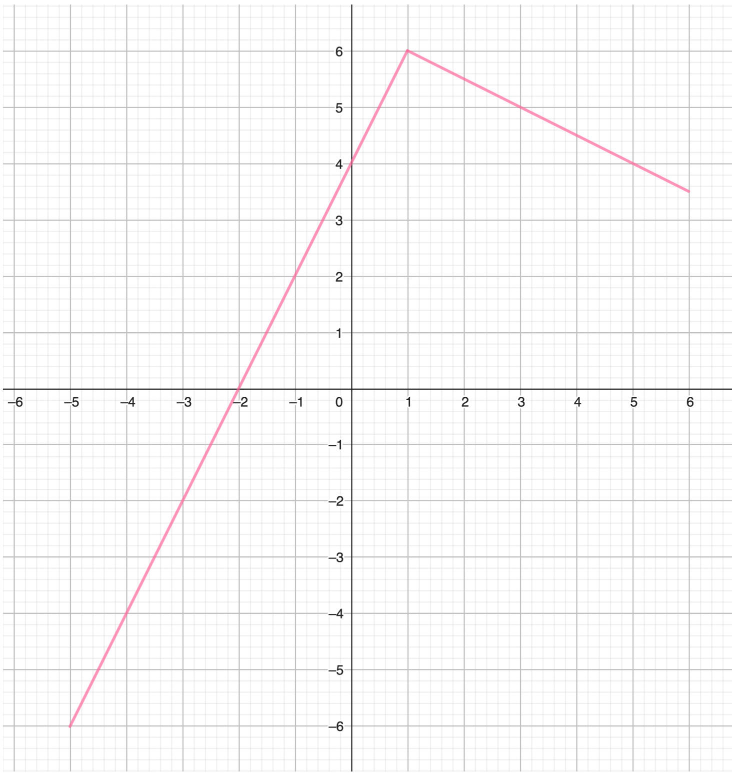
x	-1,2		0,65		1,3
Variations de f	3,28	↘	-0,48	↗	1,55

x	$-1{,}2$		0		1		$1{,}3$
Signes de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	



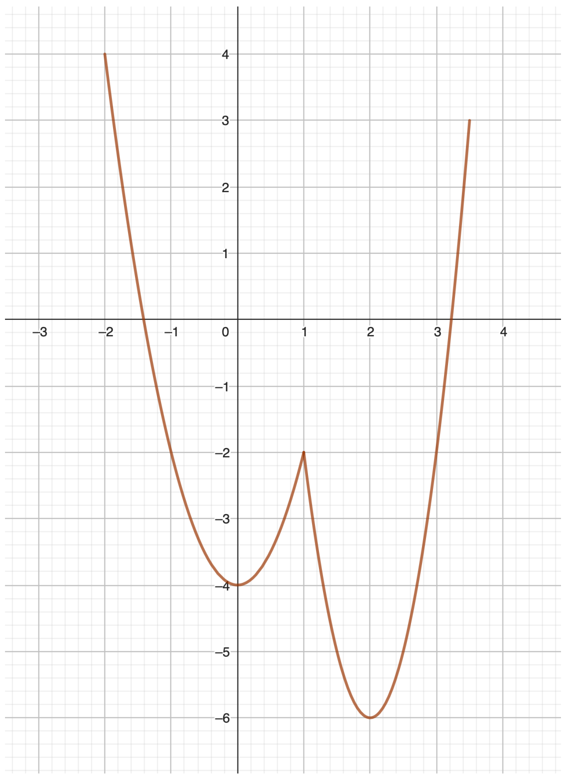
x	-2		-0,9		1,15		2
Variations de g	2,12	↘	-0,8	↗	1,5	↘	0

x	-2		-1,5		-0,06		2
Signes de $g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	



x	-5		1		6
Variations de h			6		
	-6	↗		↘	3,5

x	-5		-2		6
Signes de $h(x)$		$-$	0	$+$	



x	-2		0		1		2		3,5
Variations de i	4	↘	-4	↗	-2	↘	-6	↗	3

x	-2		-1,4		3,2		3,5
Signes de $i(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Exercice 2.10

Soit f la fonction dont le tableau de variation est donné ci-dessous.

x	-7		-2		1		5		7		12
Variations de f	12	↘	1	↗	15	→	15	↘	0	↘	-3

a) Construire le tableau de signes de la fonction f.

x	-7		7		12
Signes de $f(x)$		$+$	0	$-$	

b) En déduire les solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant 0$ sur $[-7; 12]$.

$S = [-7;\ 7]$

Exercice 2.11

<u>*Méthode 1*</u>

a) Étudier le signe de $A(x) = (-3x + 15)\ (5 - 3x)$.

$A(x) = (-3x + 15)\ (5 - 3x)$

$A(x) = 3\ (-x + 5)\ (5 - 3x)$

x	$-\infty$		$\frac{5}{3}$		5		$+\infty$
Signe de 3		$+$	|	$+$	|	$+$	
Signe de $-x+5$		$+$	|	$+$	0	$-$	
Signe de $5-3x$		$+$	0	$-$	|	$-$	
Signe de $A(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

b) Étudier le signe de $B(x) = (-3x + 15)\ (5 + x)$

$B(x) = (-3x + 15)\ (5 + x)$

$B(x) = 3\ (-x + 5)\ (5 + x)$

x	$-\infty$		-5		5		$+\infty$
Signe de 3		$+$	|	$+$	|	$+$	
Signe de $-x+5$		$+$	|	$+$	0	$-$	
Signe de $5+x$		$-$	0	$+$	|	$+$	
Signe de $B(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Dans les deux tableaux de signe, comme 3 est un nombre positif, la ligne n'est pas obligatoire.
Elle est seulement obligatoire pour des nombres négatifs.

<u>*Méthode 2*</u>

a) Étudier le signe de $A(x) = (-3x + 15)\ (5 - 3x)$.

x	$-\infty$		$\frac{5}{3}$		5		$+\infty$
Signe de $(-3x+15)$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $(5-3x)$		$+$	0	$-$		$-$	
Signe de $(-3x+15)\ (5-3x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

b) Étudier le signe de $B(x) = (-3x + 15)\ (5 + x)$.

x	$-\infty$		-5		5		$+\infty$
Signe de $(-3x+15)$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $(5+x)$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $(-3x+15)\ (5+x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

c) En déduire les solutions des inéquations $A(x) < 0$ et $B(x) \leqslant 0$.

Pour $A(x) < 0$, $S = \left]\frac{5}{3};\ 5\right[$ et pour $B(x) \leqslant 0$, $S =]+\infty; -5] \cup [5; +\infty[$

Exercice 2.12

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{-x+1}{x+2}$.

a) Construire le tableau de signes de la fonction f.

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
Signe de $(-x+1)$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $(x+2)$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $\dfrac{(-x+1)}{(x+2)}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

b) En déduire les solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant 0$.

Sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$, l'ensemble solution de $f(x) \leqslant 0$ est $S =]-\infty; -2[\cup [1; +\infty[$

Exercice 2.13

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes

a) $-\dfrac{4}{x-7} \leqslant 0$

On peut résoudre dans $\mathbb{R}\backslash\{7\}$ cette équation.

x	$-\infty$		7		$+\infty$
Signe de -4		$-$	|	$-$	
Signe de $(x-7)$		$-$	0	$+$	
Signe de $\dfrac{-4}{x-7}$		$+$	||	$-$	

On obtient $S =]7;+\infty[$

b) $\dfrac{2x-1}{x+3} < 5$

On peut résoudre dans $\mathbb{R}\backslash\{-3\}$ cette équation.

$$\frac{2x-1}{x+3} - 5 < 0$$

$$\frac{2x-1}{x+3} - \frac{5\ (x+3)}{x+3} < 0$$

$$\frac{2x-1-5x-5\times 3}{x+3} < 0$$

$$\frac{-3x-16}{x+3} < 0$$

x	$-\infty$		$-\dfrac{16}{3}$		-3		$+\infty$
Signe de $(-3x-16)$		$+$	0	$-$	|	$-$	
Signe de $(x+3)$		$-$	|	$-$	0	$+$	
Signe de $\dfrac{-3x-16}{x+3}$		$-$	0	$+$	||	$-$	

On obtient $S = \left]-\infty;-\dfrac{16}{3}\right[\cup]-3;+\infty[$

Exercice 2.14

Soit f la fonction dont le tableau de variation est donné ci-dessous.

x	$-\infty$		-2		0		6		14		20
Variations de f	1	↗	15	↘	-10	↗	-2	↘	-4	↗	-1

a) Dire si les propositions suivantes sont vraies, fausses ou si on ne peut pas répondre

1) Le domaine de définition D_f de la fonction f est $\mathbb{R}$.

D'après le tableau de variation, le domaine de définition de f est $]-\infty;\ 20]$.
La proposition est fausse.

2) L'image de -3 par la fonction f est 12.

On ne peut pas répondre. L'image de -3 est comprise entre -10 et 15.

3) $-4 < f(9) < -2$

D'après le tableau de variation, $-4 < f(9) < -2$.
Donc la proposition est vraie.

4) -12 n'a pas d'antécédent par la fonction f

Le minimum -10 de la fonction est atteint en 0.
Donc la proposition est vraie.

5) -12 n'a pas d'image par la fonction f.

$-12 \in D_f$

Donc -12 a une unique image par la fonction f.
Alors la proposition est fausse.

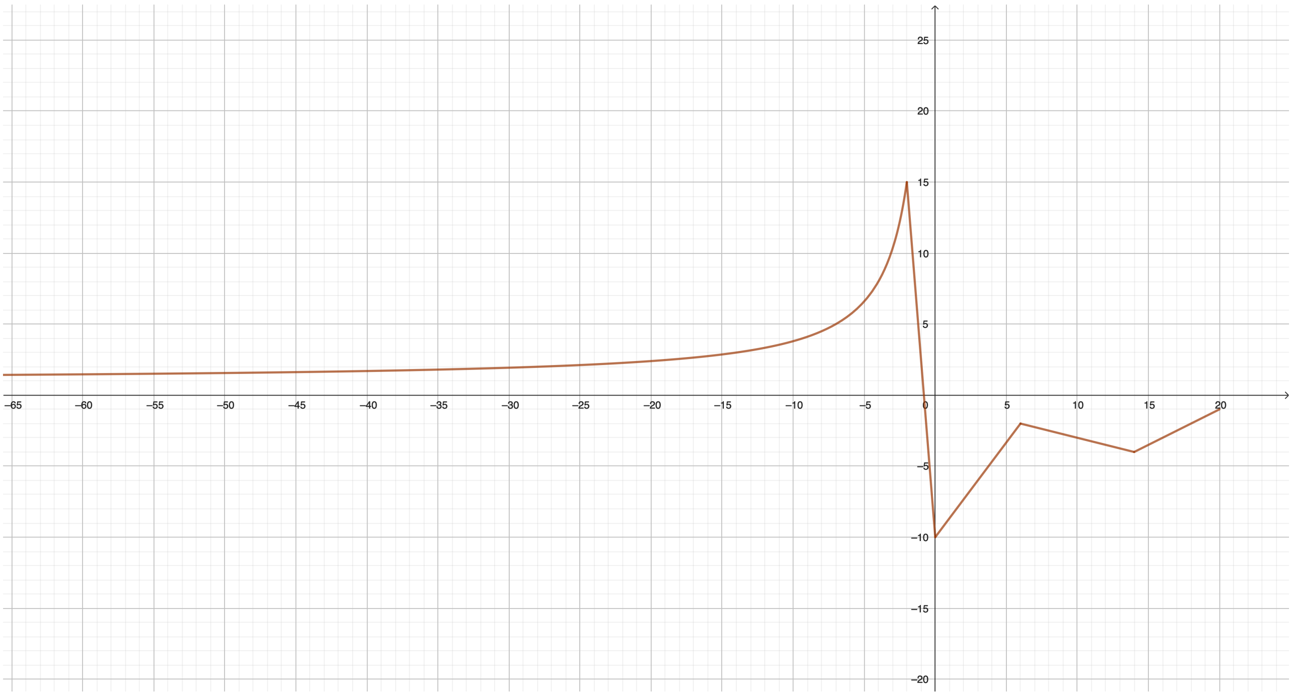
6) L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution.

$f(x) = 0$ est vrai seulement pour une valeur comprise entre -2 et 0, soit $-2 < x < 0$.
Donc la proposition est vraie.

7) L'équation $f(x) = -10$ admet pour ensemble solution $S = \emptyset$

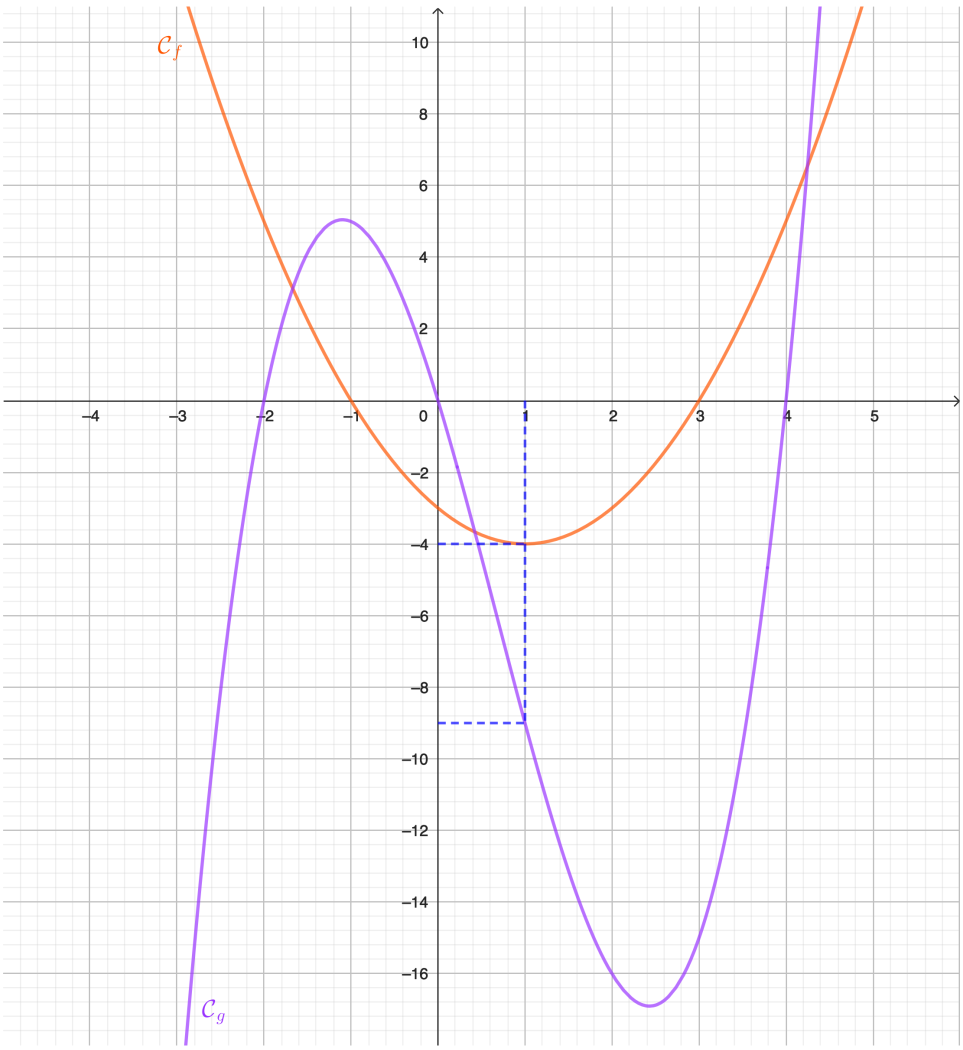
$f(x) = -10$ admet comme solution $x = 0$.
La proposition est fausse.

b) Tracer une courbe représentative possible de f dans un repère orthonormé.



Synthèse

Exercice 2.15



On considère les fonctions f et g définies respectivement sur $\mathbb{R}$ par
$f(x) = x^2 - 2x - 3$ *et*
$g(x) = x^3 - 2x^2 - 8x$.

a) Tracez les fonctions de manière numérique en utilisant un logiciel comme votre calculatrice graphique ou GeoGebra.

b) Déterminer graphiquement les images de 1 par les fonctions f et g.
Puis retrouver ce résultat par le calcul.

Par lecture graphique, les images de 1 par les fonctions f et g sont respectivement -4 et -9.

c) Résoudre $f(x) = -3$

$f(x) = x^2 - 2x - 3$ et $f(x) = -3$
Donc $x^2 - 2x - 3 = -3$
$x^2 - 2x - 3 + 3 = 0$
$x^2 - 2x = 0$
$x\ (x - 2) = 0$
$x = 0$ ou $x - 2 = 0$
$x = 0$ ou $x = 2$
$S = \{0;\ 2\}$

d) Déterminer graphiquement le ou les antécédents de 0 par la fonction f.

Par lecture graphique, les antécédents de 0 par la fonction f sont -1 et 3.

e) Développer $(x+2)\ (x-4)$. En déduire l'expression factorisée de g.

$(x+2)\ (x-4) = x^2 - 4x + 2x - 8$
$(x+2)\ (x-4) = x^2 - 2x - 8$

$g(x) = x^3 - 2x^2 - 8x$
$g(x) = x\ (x^2 - 2x - 8)$
$g(x) = x\ (x+2)\ (x-4)$

f) Dresser le tableau de variations de la fonctions g en utilisant la lecture graphique.
Dresser le tableau de signe de la fonction g sans utiliser la lecture graphique..

x	$-\infty$		$-1,1$		$2,4$		$+\infty$
$Variation\ de\ g$	$-\infty$	↗	5	↘	-17	↗	$+\infty$

x	$-\infty$		-2		0		4		$+\infty$
$Signes\ de\ x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$Signes\ de\ (x+2)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$Signes\ de\ (x-4)$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$Signes\ de\ g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

III. Géométrie

Vecteurs

Exercice 3.1

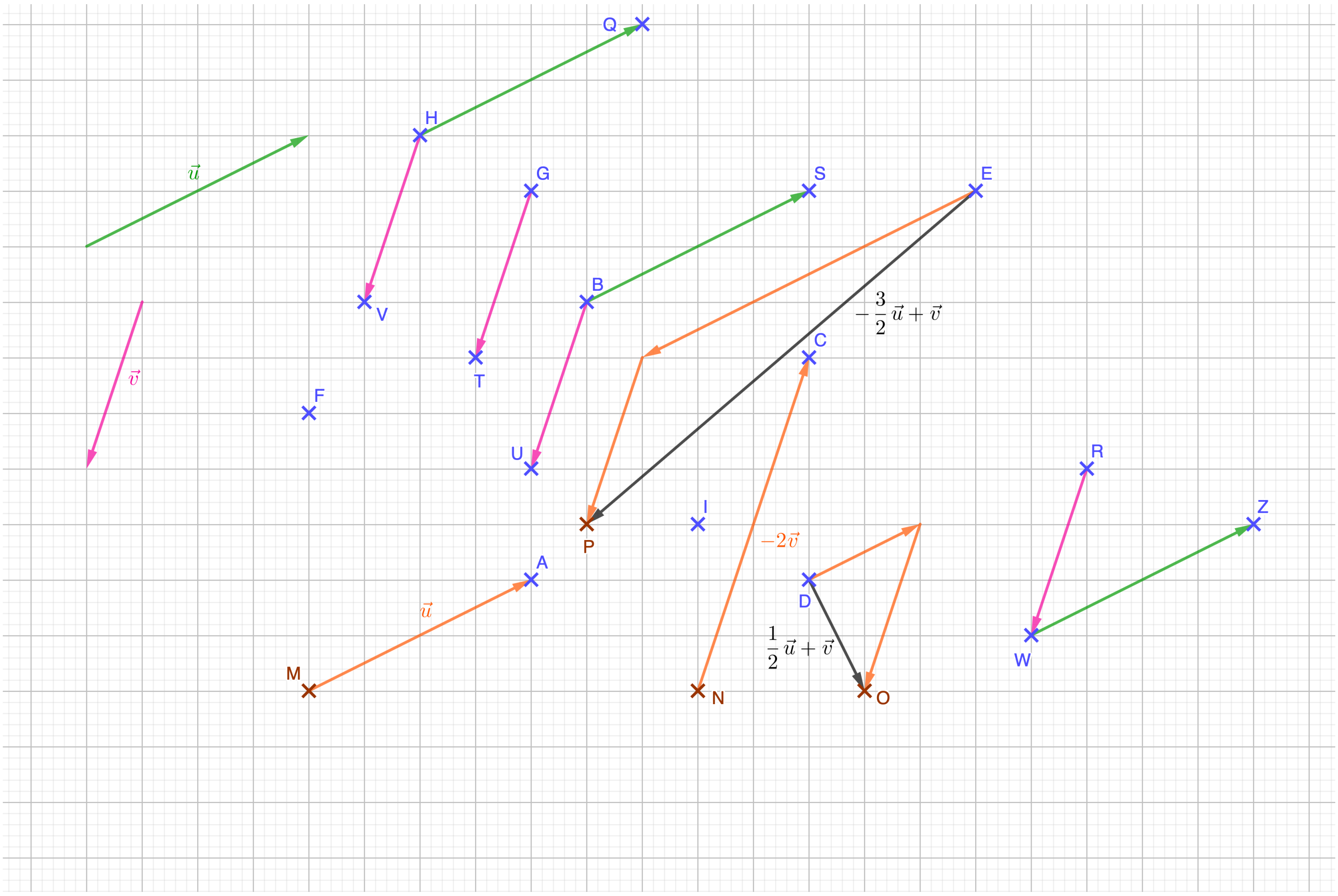
a) Déterminer tous les vecteurs égaux aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Nous avons les vecteurs $\overrightarrow{HQ}$, $\overrightarrow{BS}$ ET $\overrightarrow{WZ}$ qui sont égaux à $\vec{u}$, et les vecteurs $\overrightarrow{HV}$, $\overrightarrow{GT}$, $\overrightarrow{BU}$ et $\overrightarrow{RW}$ qui sont égaux à $\vec{v}$.

b) Construire les points M et N tels que $\overrightarrow{MA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{NC} = -2\,\vec{v}$.

c) Construire le point O tel que $\overrightarrow{DO} = \dfrac{1}{2}\vec{u} + \vec{v}$

d) Construire le vecteur $\overrightarrow{EP}$ tel que $\overrightarrow{EP} = -\dfrac{3}{2}\vec{u} + \vec{v}$



Exercice 3.2

En utilisant les figures, simplifier les égalités vectorielles suivantes :

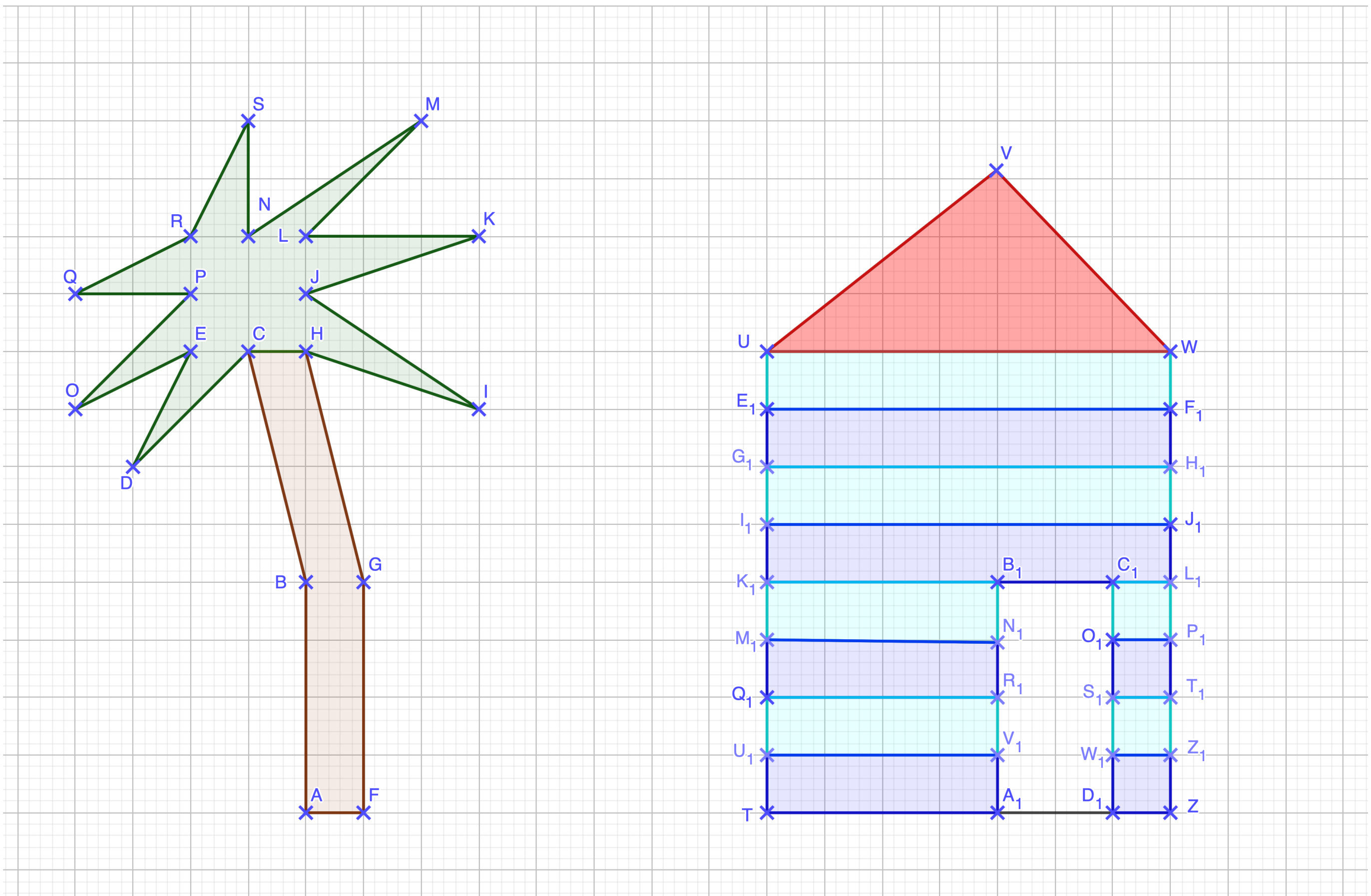
1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{AH}$ ou $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{TU}$ ou $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{ZW}$

2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{TU_1}=\overrightarrow{TI_1}$ ou $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{TU_1}=\overrightarrow{U_1G_1}$ ou $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{TU_1}=\overrightarrow{Q_1E_1}$
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{TU_1}=\overrightarrow{M_1U}$ ou $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{TU_1}=\overrightarrow{ZJ_1}$ ou $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{TU_1}=\overrightarrow{Z_1H_1}$
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{TU_1}=\overrightarrow{T_1F_1}$ ou $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{TU_1}=\overrightarrow{P_1W}$ ou $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{TU_1}=\overrightarrow{BJ}$

3) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{UE_1}=\overrightarrow{IK}$ ou $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{UE_1}=\overrightarrow{TM_1}$ ou $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{UE_1}=\overrightarrow{U_1K_1}$
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{UE_1}=\overrightarrow{Q_1I_1}$ ou $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{UE_1}=\overrightarrow{M_1G_1}$ ou $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{UE_1}=\overrightarrow{K_1E_1}$
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{UE_1}=\overrightarrow{I_1U}$ ou $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{UE_1}=\overrightarrow{A_1N_1}$ ou $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{UE_1}=\overrightarrow{V_1B_1}$
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{UE_1}=\overrightarrow{D_1O_1}$ ou $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{UE_1}=\overrightarrow{W_1C_1}$ ou $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{UE_1}=\overrightarrow{ZP_1}$
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{UE_1}=\overrightarrow{Z_1L_1}$ ou $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{UE_1}=\overrightarrow{T_1J_1}$ ou $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{UE_1}=\overrightarrow{P_1H_1}$
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{UE_1}=\overrightarrow{L_1F_1}$ ou $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{UE_1}=\overrightarrow{J_1W}$

4) $\overrightarrow{LM}-\overrightarrow{NR}=\overrightarrow{DH}$ ou $\overrightarrow{LM}-\overrightarrow{NR}=\overrightarrow{HK}$ ou $\overrightarrow{LM}-\overrightarrow{NR}=\overrightarrow{NM}$

5) $\overrightarrow{UW}+\overrightarrow{ZD_1}-\overrightarrow{TA_1}-\overrightarrow{B_1C_1}=\vec{0}$



Exercice 3.3

Simplifier au maximum les sommes vectorielles suivantes grâce à la relation de Chasles :

1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM}$

2) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$

$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AD}$

3) $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CD} = \vec{0}$

4) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DB}$

5) $-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB}$

$-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$

$-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA}$

6) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$

Exercice 3.4

EFG est un triangle et M un point extérieur à ce triangle.

1) Construire les points I, J, K et H tels que :

a) $\overrightarrow{MI} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{ME}$

b) $\overrightarrow{MJ} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{MF}$

c) $2\overrightarrow{MG} + 3\overrightarrow{KM} = \vec{0}$

$3\overrightarrow{KM} = -2\overrightarrow{MG}$

$\overrightarrow{KM} = -\dfrac{2}{3}\overrightarrow{MG}$

d) $2\overrightarrow{FH} + \overrightarrow{GH} = \vec{0}$ *(Pour le point H, on pourra d'abord montrer qu'il vérifie $2\overrightarrow{FG} + 3\overrightarrow{GH} = \vec{0}$)*

$2\left(\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GH}\right) + \overrightarrow{GH} = \vec{0}$ Relation de Chasles

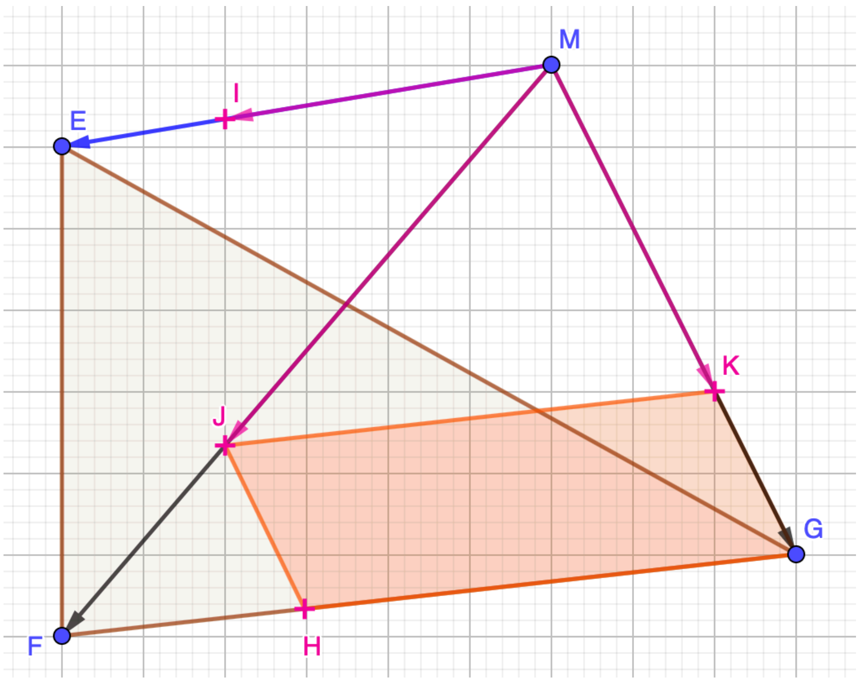
$2\overrightarrow{FG} + 2\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{GH} = \vec{0}$

$2\overrightarrow{FG} + 3\overrightarrow{GH} = \vec{0}$

$3\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{FG}$

$\overrightarrow{GH} = -\dfrac{2}{3}\overrightarrow{FG}$

$\overrightarrow{GH} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{GF}$



2) Conjecturer la nature du quadrilatère KJHG

Le quadrilatère $KJHG$ semble être un parallélogramme.

3) Démontrer cette conjecture.

$\overrightarrow{KJ} = \overrightarrow{KM} + \overrightarrow{MJ}$

$\overrightarrow{KJ} = -\dfrac{2}{3}\overrightarrow{MG} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{MF}$

$\overrightarrow{KJ} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{GM} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{MF}$

$\overrightarrow{KJ} = \dfrac{2}{3}(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MF})$

$\overrightarrow{KJ} = \dfrac{2}{3}\ \overrightarrow{GF}$ Relation de Chasles

Comme $\overrightarrow{GH} = \dfrac{2}{3}\ \overrightarrow{GF}$, on peut en déduire que $\overrightarrow{KJ} = \overrightarrow{GH}$.

Donc le quadrilatère $KJHG$ est un parallélogramme.

Vecteurs et repère

Exercice 3.5

Dans un repère $(0; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(0; -2)$, $B(-2; -1)$, $C(4; 0)$ et $D(2; 3)$.

a) Déterminer les coordonnées des points I, J, K et L milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, et $[DA]$.

$I\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}; \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$ $J\left(\dfrac{x_B + x_C}{2}; \dfrac{y_B + y_C}{2}\right)$ $K\left(\dfrac{x_C + x_D}{2}; \dfrac{y_C + y_D}{2}\right)$

$I\left(\dfrac{0-2}{2}; \dfrac{-2-1}{2}\right)$ $J\left(\dfrac{-2+4}{2}; \dfrac{-1+0}{2}\right)$ $K\left(\dfrac{4+2}{2}; \dfrac{0+3}{2}\right)$

$I\left(-1; -\dfrac{3}{2}\right)$ $J\left(1; -\dfrac{1}{2}\right)$ $K\left(3; \dfrac{3}{2}\right)$

$L\left(\dfrac{x_A + x_D}{2}; \dfrac{y_A + y_D}{2}\right)$ $L\left(\dfrac{0+2}{2}; \dfrac{-2+3}{2}\right)$ $L\left(1; \dfrac{1}{2}\right)$

b) Montrer que $IJKL$ est un parallélogramme.

Calculons les coordonnées de $\overrightarrow{IJ}$

$$\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} x_J - x_I \\ y_J - y_I \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} 1-(-1) \\ -\frac{1}{2}-(-\frac{3}{2}) \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} 1+1 \\ -\frac{1}{2}+\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calculons les coordonnées de $\overrightarrow{LK}$

$$\overrightarrow{LK}\begin{pmatrix} x_K - x_L \\ y_K - y_L \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{LK}\begin{pmatrix} 3-1 \\ \frac{3}{2}-\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{LK}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$

On peut en conclure que $IJKL$ est un parallélogramme.

Exercice 3.6

Dans un repère $(0;\vec{i},\vec{j})$, on considère les points $A(0;1)$, $B(-1;-2)$, $C(2;7)$.

a) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont colinéaires.

Calculons les coordonnées de $\overrightarrow{BA}$

$$\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} x_A - x_B \\ y_A - y_B \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} 0-(-1) \\ 1-(-2) \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Calculons les coordonnées de $\overrightarrow{CB}$

$$\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix} x_B - x_C \\ y_B - y_C \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix} -1-2 \\ -2-7 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix} -3 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Calculons le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CB}$

$det(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CB}) = 1 \times (-9) - 3 \times (-3)$

$det(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CB}) = -9 + 9$

$det(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CB}) = 0$

Le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CB}$ est égal à 0.

Donc les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont colinéaires.

b) Que peut-on en déduire pour les points A, B et C ?

Les vecteurs vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont colinéaires.

Donc (BA) // (CB).

Les droites (BA) et (CB) ont aussi le point B en commun.
Elles sont donc confondues.

Alors les points A, B et C sont alignés.

c) Déterminer les coordonnées du point D tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

Donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}x_D - x_C\\y_D - y_C\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}x_D - 2\\y_D - 7\end{pmatrix}$

On a alors $\begin{cases}x_D - 2 = -1\\y_D - 7 = -3\end{cases}$

$\begin{cases}x_D = -1 + 2\\y_D = -3 + 7\end{cases}$

$\begin{cases}x_D = 1\\y_D = 4\end{cases}$

Donc $D(1;\ 4)$

d) Soient les points N et P de coordonnées respectives $(4; 13)$ et $(6; 18)$.
Déterminer les positions relatives des droites (AB) et (AN) ainsi que des droites (AB) et (AP).

Position relative des droites (AB) et (AN)

Pour déterminer la position relative des droites (AB) et (AN), nous allons d'abord calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AN}$. Puis nous calculerons le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN}$.

Calculons les coordonnées de $\overrightarrow{AN}$

$\overrightarrow{AN}\begin{pmatrix}x_N - x_A\\y_N - y_A\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AN}\begin{pmatrix}4-0\\13-1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AN}\begin{pmatrix}4\\12\end{pmatrix}$

Calculons le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN}$

$det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AN}) = -1 \times 12 - (-3) \times 4$

$det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AN}) = -12 + 12$

$det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AN}) = 0$

Le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN}$ est égal à 0.

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont colinéaires.

Alors (AB) // (AN).

Les droites (AB) et (AN) ont aussi le point A en commun.

Elles sont donc confondues.

Position relative des droites (AB) et (AP)

Pour déterminer la position relative des droites (AB) et (AP), nous allons d'abord calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AP}$. Puis nous calculerons le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AP}$.

Calculons les coordonnées de $\overrightarrow{AP}$

$$\overrightarrow{AP}\begin{pmatrix} x_P - x_A \\ y_P - y_A \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{AP}\begin{pmatrix} 6-0 \\ 18-1 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{AP}\begin{pmatrix} 6 \\ 17 \end{pmatrix}$$

Calculons le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AP}$

$$det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AP}) = -1 \times 17 - (-3) \times 6$$
$$det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AP}) = -17 + 18$$
$$det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AP}) = 1$$

Le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AP}$ n'est pas égal à 0.

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AP}$ ne sont pas colinéaires.

Alors les droites (AB) et (AP) ne sont pas parallèles.

Donc les droites (AB) et (AP) sont sécantes en A

Exercice 3.7

Dans un repère orthonormé $(0; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $S(3;5)$, $U(6;2)$, $N(-3;-1)$.

a) Montrer que $SU = 3\sqrt{2}$.

$$\left\|\overrightarrow{SU}\right\| = \sqrt{(x_U - x_S)^2 + (y_U - y_S)^2}$$
$$\left\|\overrightarrow{SU}\right\| = \sqrt{(6-3)^2 + (2-5)^2}$$
$$\left\|\overrightarrow{SU}\right\| = \sqrt{3^2 + (-3)^2}$$
$$\left\|\overrightarrow{SU}\right\| = \sqrt{9+9}$$
$$\left\|\overrightarrow{SU}\right\| = \sqrt{2 \times 9}$$
$$\left\|\overrightarrow{SU}\right\| = \sqrt{2} \times \sqrt{9}$$
$$\left\|\overrightarrow{SU}\right\| = \sqrt{2} \times \sqrt{3}^2$$
$$\left\|\overrightarrow{SU}\right\| = 3\sqrt{2}$$

b) Calculer SN et UN.

$$\left\|\overrightarrow{SN}\right\| = \sqrt{(x_N - x_S)^2 + (y_N - y_S)^2}$$
$$\left\|\overrightarrow{SN}\right\| = \sqrt{(-3-3)^2 + (-1-5)^2}$$
$$\left\|\overrightarrow{SN}\right\| = \sqrt{(-6)^2 + (-6)^2}$$
$$\left\|\overrightarrow{SN}\right\| = \sqrt{2 \times (-6)^2}$$
$$\left\|\overrightarrow{SN}\right\| = \sqrt{2 \times 36}$$
$$\left\|\overrightarrow{SN}\right\| = \sqrt{2} \times \sqrt{6}^2$$
$$\left\|\overrightarrow{SN}\right\| = 6\sqrt{2}$$

$$\left\|\overrightarrow{UN}\right\| = \sqrt{(x_N - x_U)^2 + (y_N - y_U)^2}$$
$$\left\|\overrightarrow{UN}\right\| = \sqrt{(-3-6)^2 + (-1-2)^2}$$
$$\left\|\overrightarrow{UN}\right\| = \sqrt{(-9)^2 + (-3)^2}$$
$$\left\|\overrightarrow{UN}\right\| = \sqrt{81+9}$$
$$\left\|\overrightarrow{UN}\right\| = \sqrt{90}$$
$$\left\|\overrightarrow{UN}\right\| = \sqrt{9 \times 10}$$
$$\left\|\overrightarrow{UN}\right\| = \sqrt{9} \times \sqrt{10}$$
$$\left\|\overrightarrow{UN}\right\| = \sqrt{3^2} \times \sqrt{10}$$
$$\left\|\overrightarrow{UN}\right\| = 3\sqrt{10}$$

c) Monter que le triangle SUN est rectangle en S.

D'une part $\left\| \overrightarrow{UN} \right\|^2 = \left(3\sqrt{10}\right)^2$

$\left\| \overrightarrow{UN} \right\|^2 = 9 \times 10$

$\left\| \overrightarrow{UN} \right\|^2 = 90$

D'autre part $\left\| \overrightarrow{SU} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{SN} \right\|^2 = \left(3\sqrt{2}\right)^2 + \left(6\sqrt{2}\right)^2$

$\left\| \overrightarrow{SU} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{SN} \right\|^2 = 3^2 \times 2 + 6^2 \times 2$

$\left\| \overrightarrow{SU} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{SN} \right\|^2 = 9 \times 2 + 36 \times 2$

$\left\| \overrightarrow{SU} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{SN} \right\|^2 = 18 + 72$

$\left\| \overrightarrow{SU} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{SN} \right\|^2 = 90$

Donc $\left\| \overrightarrow{UN} \right\|^2 = \left\| \overrightarrow{SU} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{SN} \right\|^2$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle SUN est rectangle en S.

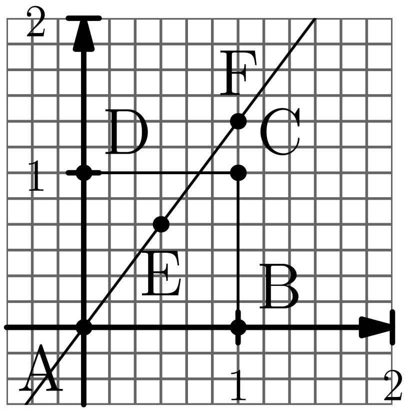
Synthèse Vecteurs

Exercice 3.8

Soit $ABCD$ un carré de côté 6 cm. Les points E et F sont les points définis par $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} - \frac{7}{6}\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{BF} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{CB}$.

1) Construire la figure en vraie grandeur.

On note $\overrightarrow{AB} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{AD} = \vec{j}$. On se place dans le repère $(A;\ \vec{i};\ \vec{j})$.



2) Quelle est la nature du repère $(A;\ \vec{i};\ \vec{j})$?

$ABCD$ est un carré.

Donc $AB = AD$ et $(AB) \perp (AD)$

Alors $\left\| \vec{i} \right\| = \left\| \vec{j} \right\|$ et $(AB) \perp (AD)$.

Donc le repère $(A;\ \vec{i};\ \vec{j})$ est un repère orthonormé.

3) Quelles sont les coordonnées des points A, B, C et D ?

Les points A, B, C et D ont pour coordonnées respectives $(0;\ 0)$; $(1;\ 0)$; $(1;\ 1)$ et $(0;\ 1)$.

Soient $A(0;\ 0)$; $B(1;\ 0)$; $C(1;\ 1)$ et $D(0;\ 1)$.

4) a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AE}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et du vecteur $\overrightarrow{AD}$.

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{DB} - \frac{7}{6}\ \overrightarrow{DA}$$

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{DB} - \frac{7}{6}\ \overrightarrow{DA}$$

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\ \left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}\right) - \frac{7}{6}\ \overrightarrow{DA}$$

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\ \overrightarrow{AB} - \frac{7}{6}\ \overrightarrow{DA}$$

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{AB} + \left(\frac{1}{2} - \frac{7}{6}\right)\ \overrightarrow{DA}$$

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{AB} + \frac{3-7}{6}\ \overrightarrow{DA}$$

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{AB} - \frac{4}{6}\ \overrightarrow{DA}$$

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\ \overrightarrow{DA}$$

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\ \overrightarrow{AD}$$

b) En déduire les coordonnées du point E.

$$E\left(\frac{1}{2};\ \frac{2}{3}\right)$$

3) Quelles sont les coordonnées du point F ?

$$\overrightarrow{BF} = -\frac{4}{3}\ \overrightarrow{CB}$$

$ABCD$ est un parallélogramme.

Donc $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$

Alors $\overrightarrow{BF} = -\frac{4}{3}\ \overrightarrow{DA}$

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} = -\frac{4}{3}\ \overrightarrow{DA}$$

$$\overrightarrow{AF} = -\overrightarrow{BA} - \frac{4}{3}\ \overrightarrow{DA}$$

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\ \overrightarrow{AD}$$

Donc $F\left(1;\ \frac{4}{3}\right)$

4) Les points A, E et F sont-ils alignés ?

Les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$ ont pour coordonnées :

$$\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{2}{3}\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}1\\ \frac{4}{3}\end{pmatrix}$$

<u>Calculons le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$</u>

$$det\left(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AF}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} - \frac{2}{3} \times 1$$

$$det\left(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AF}\right) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}$$

$$det\left(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AF}\right) = 0$$

Le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$ est égal à 0.

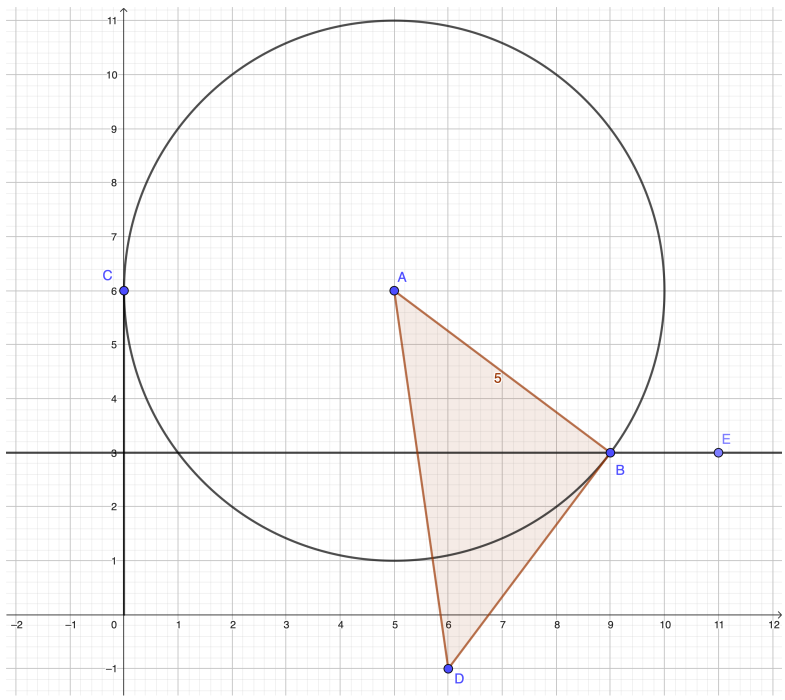
Donc les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont colinéaires.

Alors (AE) // (AF).

Les droites (AE) et (AF) ont aussi le point A en commun.
Elles sont donc confondues.
Alors les points A, E et F sont alignés.

Exercice 3.9

Soient les points $A(5;\ 6)$, $B(9;\ 3)$, $C(0;\ 6)$, $D(6;\ -1)$ et $E(11;\ 3)$.



a) Le point B appartient-il au cercle de centre A et de rayon $5\ cm$?

$$\left\| \overrightarrow{AB} \right\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$
$$\left\| \overrightarrow{AB} \right\| = \sqrt{(9-5)^2 + (3-6)^2}$$
$$\left\| \overrightarrow{AB} \right\| = \sqrt{4^2 + (-3)^2}$$
$$\left\| \overrightarrow{AB} \right\| = \sqrt{16+9}$$
$$\left\| \overrightarrow{AB} \right\| = \sqrt{25}$$
$$\left\| \overrightarrow{AB} \right\| = 5$$

Le point B est situé à $5\ cm$ du point A, il appartient donc au cercle de centre A et de rayon $5\ cm$.

b) Le point E est-il sur la médiatrice du segment $[OC]$?

Calculons la norme du vecteur $\overrightarrow{EO}$

$$\left\| \overrightarrow{E0} \right\| = \sqrt{(x_E - x_0)^2 + (y_E - y_0)^2}$$
$$\left\| \overrightarrow{E0} \right\| = \sqrt{(11-0)^2 + (3-0)^2}$$
$$\left\| \overrightarrow{E0} \right\| = \sqrt{11^2 + 3^2}$$
$$\left\| \overrightarrow{E0} \right\| = \sqrt{121+9}$$
$$\left\| \overrightarrow{EO} \right\| = \sqrt{130}$$

Calculons la norme du vecteur $\overrightarrow{EC}$

$$\left\| \overrightarrow{EC} \right\| = \sqrt{(x_E - x_C)^2 + (y_E - y_C)^2}$$
$$\left\| \overrightarrow{EC} \right\| = \sqrt{(11-0)^2 + (3-6)^2}$$
$$\left\| \overrightarrow{EC} \right\| = \sqrt{11^2 + (-3)^2}$$
$$\left\| \overrightarrow{EC} \right\| = \sqrt{121+9}$$
$$\left\| \overrightarrow{EC} \right\| = \sqrt{130}$$

Comparons les normes des vecteurs $\overrightarrow{EO}$ et $\overrightarrow{EC}$

$$\left\| \overrightarrow{EO} \right\| = \left\| \overrightarrow{EC} \right\|$$

Or si un point est équidistant des extrémités d'un segment, alors il appartient à la médiatrice ce ce segment.

Donc le point E appartient à la médiatrice du segment $[OC]$.

c) Quelle est la nature du triangle ABD ?

Norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$

D'après la question a), $\left\| \overrightarrow{AB} \right\| = 5$.

Calculons la norme du vecteur $\overrightarrow{BD}$

$$\left\| \overrightarrow{BD} \right\| = \sqrt{(x_B - x_D)^2 + (y_B - y_D)^2}$$
$$\left\| \overrightarrow{BD} \right\| = \sqrt{(9-6)^2 + (3-(-1))^2}$$
$$\left\| \overrightarrow{BD} \right\| = \sqrt{3^2 + 4^2}$$
$$\left\| \overrightarrow{BD} \right\| = \sqrt{9+16}$$
$$\left\| \overrightarrow{BD} \right\| = \sqrt{25}$$
$$\left\| \overrightarrow{BD} \right\| = 5$$

Calculons la norme du vecteur $\overrightarrow{AD}$

$$\left\| \overrightarrow{AD} \right\| = \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2}$$
$$\left\| \overrightarrow{AD} \right\| = \sqrt{(6-5)^2 + (-1-6)^2}$$
$$\left\| \overrightarrow{AD} \right\| = \sqrt{1^2 + (-7)^2}$$
$$\left\| \overrightarrow{AD} \right\| = \sqrt{1+49}$$
$$\left\| \overrightarrow{AD} \right\| = \sqrt{50}$$
$$\left\| \overrightarrow{AD} \right\| = \sqrt{25 \times 2}$$
$$\left\| \overrightarrow{AD} \right\| = 5\sqrt{2}$$

Nature du triangle ABD

Comme $\left\| \overrightarrow{AB} \right\| = \left\| \overrightarrow{BD} \right\|$, le triangle ABD est isocèle en B.

Vérifions si le triangle ABD est rectangle.

D'une part $\left\| \overrightarrow{AD} \right\|^2 = \sqrt{50}^2$

$\left\| \overrightarrow{AD} \right\|^2 = 50$

D'autre part $\left\| \overrightarrow{AB} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{BD} \right\|^2 = 5^2 + 5^2$

$\left\| \overrightarrow{AB} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{BD} \right\|^2 = 25 + 25$

$\left\| \overrightarrow{AB} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{BD} \right\|^2 = 50$

Donc $\left\| \overrightarrow{AD} \right\|^2 = \left\| \overrightarrow{AB} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{BD} \right\|^2$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABD est rectangle en B

Nature du triangle ABD

Donc le triangle ABD est rectangle isocèle en B.

d) Est-ce qu'un point d'ordonnée négative peut appartenir au disque de centre A et de rayon $5\ cm$?

La distance entre le point A et l'axe des abscisses est égale à l'ordonnée du point A, soit $6\ cm$. Le rayon du cercle, $5\ cm$, est inférieure à la distance de A à l'axe des abscisses donc toute la surface du disque est située au-dessus de l'axe des abscisses.

Un point d'ordonnée négative sera situé au-dessous de l'axe des abscisses. Il ne peut donc pas appartenir au disque de centre A et de rayon $5\ cm$.

Exercice 3.10

On considère les points A, B et C respectivement de coordonnées $(1;\ 6)$, $(-4;\ 4)$ et $(-6;\ -1)$.

a) Quelles sont les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme ?

$ABCD$ soit un parallélogramme

Donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

Calculons les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -4 - 1 \\ 4 - 6 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}$

Calculons les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} x_C - x_D \\ y_C - y_D \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} -6 - x_D \\ -1 - y_D \end{pmatrix}$

Calculons les coordonnées du point D

On a alors $\begin{cases} -6 - x_D = -5 \\ -1 - y_D = -2 \end{cases}$

$\begin{cases} x_D = -6 + 5 \\ y_D = -1 + 2 \end{cases}$

$\begin{cases} x_D = -1 \\ y_D = 1 \end{cases}$

b) Prouver que $ABCD$ est aussi un losange.

Calculons la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$

$\left\| \overrightarrow{AB} \right\| = \sqrt{x_{\overrightarrow{AB}}^2 + y_{\overrightarrow{AB}}^2}$

$\left\| \overrightarrow{AB} \right\| = \sqrt{(-5)^2 + (-2)^2}$

$\left\| \overrightarrow{AB} \right\| = \sqrt{25 + 4}$

$\left\| \overrightarrow{AB} \right\| = \sqrt{29}$

Calculons la norme du vecteur $\overrightarrow{BC}$

$\left\| \overrightarrow{BC} \right\| = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$

$\left\| \overrightarrow{BC} \right\| = \sqrt{(-6 - (-4))^2 + (-1 - 4)^2}$

$\left\| \overrightarrow{BC} \right\| = \sqrt{(-2)^2 + (-5)^2}$

$\left\| \overrightarrow{BC} \right\| = \sqrt{4 + 25}$

$\left\| \overrightarrow{BC} \right\| = \sqrt{29}$

Nature du quadrilatère $ABCD$

On a donc $\left\| \overrightarrow{AB} \right\| = \left\| \overrightarrow{BC} \right\|$

Or si un parallélogramme a deux côtés consécutifs de même longueur alors c'est un losange

Donc $ABCD$ est un losange.

Droites et équations

Exercice 3.11

Dans un repère $(0; \vec{i}, \vec{j})$, on donne une équation cartésienne de la droite d : $-2x - 3y - 7 = 0$.

a) Les points A et B de coordonnées respectives $(-1; -2)$ et $(1; -3)$ appartiennent-ils à cette droite ?

$-2x_A - 3y_A - 7 = -2 \times (-1) - 3 \times (-2) - 7$

$-2x_A - 3y_A - 7 = 2 + 6 - 7$

$-2x_A - 3y_A - 7 = 1$

Les coordonnées du point A ne vérifient pas l'équation cartésienne de la droite d.

Donc $A \notin d$

$-2x_B - 3y_B - 7 = -2 \times 1 - 3 \times (-3) - 7$

$-2x_B - 3y_B - 7 = -2 + 9 - 7$

$-2x_B - 3y_B - 7 = 0$

Les coordonnées du point B vérifient l'équation cartésienne de la droite d.

Donc $B \in d$

b) Déterminer l'ordonnée du point C d'abscisse -2 qui appartient à la droite d.

$C \in d$
$-2x_C - 3y_C - 7 = 0$
$-2 \times (-2) - 3y_C - 7 = 0$
$4 - 3y_C - 7 = 0$
$3y_C = -3$
$y_C = -1$

Donc $C(-2; -1)$

c) Déterminer l'abscisse du point D d'ordonnée -5 qui appartient à la droite d.

$D \in d$
$-2x_D - 3y_D - 7 = 0$
$-2\ x_D - 3 \times (-5) - 7 = 0$
$-2x_D + 15 - 7 = 0$
$2x_D = 8$
$x_D = \dfrac{8}{2}$
$x_D = 4$

Donc $C(4; -5)$

d) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la droite d avec les deux axes du repère orthonormé.

Calculons les coordonnées du point d'intersection de la droite d avec l'axe des abscisses.

$$\begin{cases} -2x - 3y - 7 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x - 3 \times 0 - 7 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x - 7 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = -7 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\dfrac{7}{2} \\ y = 0 \end{cases}$$

Le point d'intersection de la droite d avec l'axe des abscisses a pour coordonnées $\left(-\frac{7}{2}; 0\right)$.

Calculons les coordonnées du point d'intersection de la droite d avec l'axe des ordonnées.

$$\begin{cases} -2x - 3y - 7 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 \times 0 - 3y - 7 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3y - 7 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y = -7 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\dfrac{7}{3} \\ x = 0 \end{cases}$$

Le point d'intersection de la droite d avec l'axe des ordonnées a pour coordonnées $\left(0;\ -\dfrac{7}{3}\right)$.

e) Donner un vecteur directeur de cette droite.

L'équation cartésienne de la droite est de la forme $ax + by + c = 0$.

Un vecteur directeur de la droite a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$

Donc un vecteur de la droite d est $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Exercice 3.12

Dans un repère orthonormé $(A; \vec{i}, \vec{j})$, on considère le carré $ABCD$ tel que $B(2;\ 0)$.
Déterminer une équation cartésienne de la droite (BD) par le calcul.

Calculons les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BD}$.

Dans le repère $(A; \vec{i}, \vec{j})$, comme $B(2;\ 0)$, on a $D(0;\ 2)$.

$$\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix} x_D - x_B \\ y_D - y_B \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix} 0 - 2 \\ 2 - 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Déterminons l'équation cartésienne de la droite (BD)

Une équation cartésienne de la droite (BD) est de la forme $ax + by + c = 0$.

Un vecteur directeur de la droite a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$

Comme $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, alors on a $b = 2$ et $a = 2$.

Une équation cartésienne de la droite (BD) est donc $2x + 2y + c = 0$.

$B(2;\ 0) \in d$
Donc $2 \times 2 + 2 \times 0 + c = 0$
$4 + c = 0$
$c = -4$
Une équation cartésienne de la droite (BD) est donc $2x + 2y - 4 = 0$.

Exercice 3.13

On considère la droite Δ d'équation cartésienne $3x + 2y - 1 = 0$.

a) Donner l'équation réduite de la droite Δ.

$3x + 2y - 1 = 0$
$2y = -3x + 1$
$y = \dfrac{-3x + 1}{2}$
$y = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{2}$

Quelle est la valeur de son coefficient directeur m ?

Le coefficient directeur m est $-\dfrac{3}{2}$.

Quelle est la valeur de son ordonnée à l'origine p ?

L' ordonnée à l'origine p est $\dfrac{1}{2}$.

b) Le point A de coordonnées $(-3;\ 4)$ appartient-il à la droite Δ ?

Méthode 1

$3x_A + 2y_A - 1 = 3 \times (-3) + 2 \times 4 - 1$
$3x_A + 2y_A - 1 = -9 + 8 - 1$
$3x_A + 2y_A - 1 = -2$
Les coordonnées du point A ne vérifient pas l'équation cartésienne de la droite d.
Donc $A \notin d$

Méthode 2

$-\dfrac{3}{2}x_A + \dfrac{1}{2} = -\dfrac{3}{2} \times (-3) + \dfrac{1}{2}$
$-\dfrac{3}{2}x_A + \dfrac{1}{2} = \dfrac{9}{2} + \dfrac{1}{2}$
$-\dfrac{3}{2}x_A + \dfrac{1}{2} = \dfrac{10}{2}$
$-\dfrac{3}{2}x_A + \dfrac{1}{2} = 5$
$5 \neq 4$
Donc $A \notin d$

c) *Déterminer l'abscisse du point B de la droite Δ d'ordonnée -1.*

<u>*Méthode 1*</u>

$B \in d$

$3x_B + 2y_B - 1 = 0$

$3x_B + 2 \times (-1) - 1 = 0$

$3x_B - 2 - 1 = 0$

$3x_B = 3$

$x_B = 1$

Donc $B(1; -1)$

<u>*Méthode 2*</u>

$B \in d$

$y_B = -\frac{3}{2}x_B + \frac{1}{2}$

$-1 = -\frac{3}{2}x_B + \frac{1}{2}$

$-2 = -3x_B + 1$

$3x_B = 1 + 2$

$3x_B = 3$

$x_B = 1$

Donc $B(1; -1)$

d) *Déterminer l'ordonnée du point C de la droite Δ d'abscisse 5.*

<u>*Méthode 1*</u>

$C \in d$

$3x_C + 2y_C - 1 = 0$

$3 \times 5 + 2y_C - 1 = 0$

$15 + 2y_C - 1 = 0$

$2y_C = -14$

$y_C = -\frac{14}{2}$

$y_C = -7$

Donc $C(5; -7)$

<u>*Méthode 2*</u>

$C \in d$

$y_C = -\frac{3}{2}x_C + \frac{1}{2}$

$y_C = -\frac{3}{2} \times 5 + \frac{1}{2}$

$y_C = -\frac{15}{2} + \frac{1}{2}$

$y_C = -\frac{14}{2}$

$y_C = -7$

Donc $C(5; -7)$

Fin de la correction

Belle fin de vacances